1. $\boxed{y' + 4xy = xy^2, \quad y(0) = 1}$

$$\boxed{y' = xy(y-4)}$$

Konstantlösningarna uppfyller ej villkoret.

$$\frac{y'}{y(y-4)} = x \ , \quad 4\left(\frac{-1/4}{y} + \frac{1/4}{y-4}\right)y' = 4x$$

$$-\ln|y| + \ln|y-4| = 2x^2 + \ln|C_1| \ , \quad \frac{y-4}{y} = Ce^{2x^2}$$

Villkoret ger: $C = -3$.

$$y - 4 = -3e^{2x^2}y \ , \quad y = \frac{4}{1 + 3e^{2x^2}}$$

2.

$$\boxed{xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0 \ , \quad x > 0}$$

$$\boxed{y_1(x) = e^x}$$

$$\boxed{\text{Sätt}: \ y = y_1 z = ze^x \ , \ y' = z'e^x + ze^x \ , \ y'' = e^x(z'' + 2z' + z).}$$

$$\boxed{e^x\{x(z'' + 2z' + z) - 2(x+1)(z' + z) + (x+2)z\} = 0}$$

$$\boxed{xz'' + (-2)z' = 0}$$

$$\boxed{\text{Sätt}: \ u = z' \ , \ u' = z''.}$$

$$\boxed{z' = u = C_2 x^2 \ , \ z = C_3 x^3 + C_4}$$

$$y = e^x(C_3x^3 + C_4) = C_3e^xx^3 + C_4e^x$$

En andra lösning : $y_2 = e^xx^3$.

$$W(e^x, e^xx^3) = \begin{vmatrix} e^x & e^xx^3 \\ e^x & e^xx^3 + e^x3x^2 \end{vmatrix} = e^{2x}3x^2 \neq 0 \ , \quad x > 0$$

e^x och e^xx^3 är linjärt oberoende då $x > 0$.

Allmänna lösningen är $y = C_3e^xx^3 + C_4e^x$.

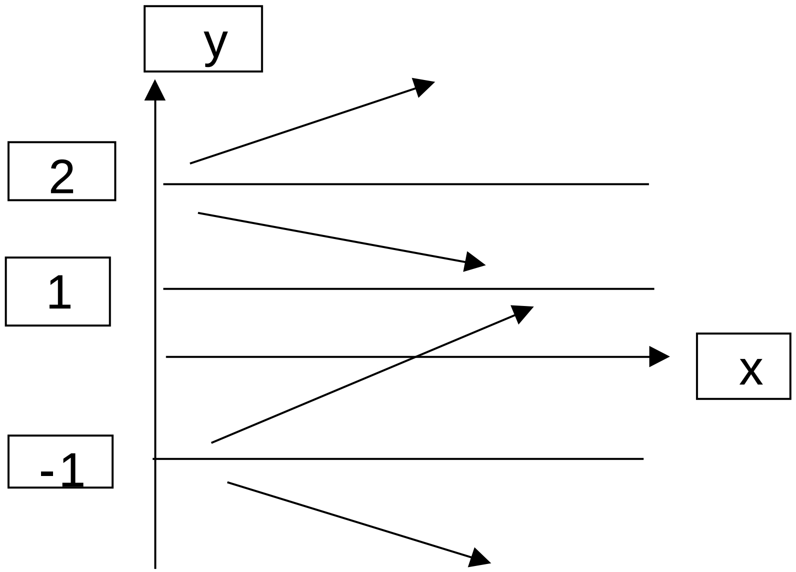
3. $$y' = (y+1)(y-1)(y-2)$$

$$y' = (y+1)(y-1)(y-2)$$

Ekvationen är autonom och dess jämviktslösningar ges av :

$$y' = (y+1)(y-1)(y-2) = 0 \ , \ \text{dvs } y = \pm 1 \ , \ y = 2.$$

y		-1		1		2	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



$y = 1$ är en stabil jämviktspunkt och $y = 2$ och $y = -1$ är instabila.

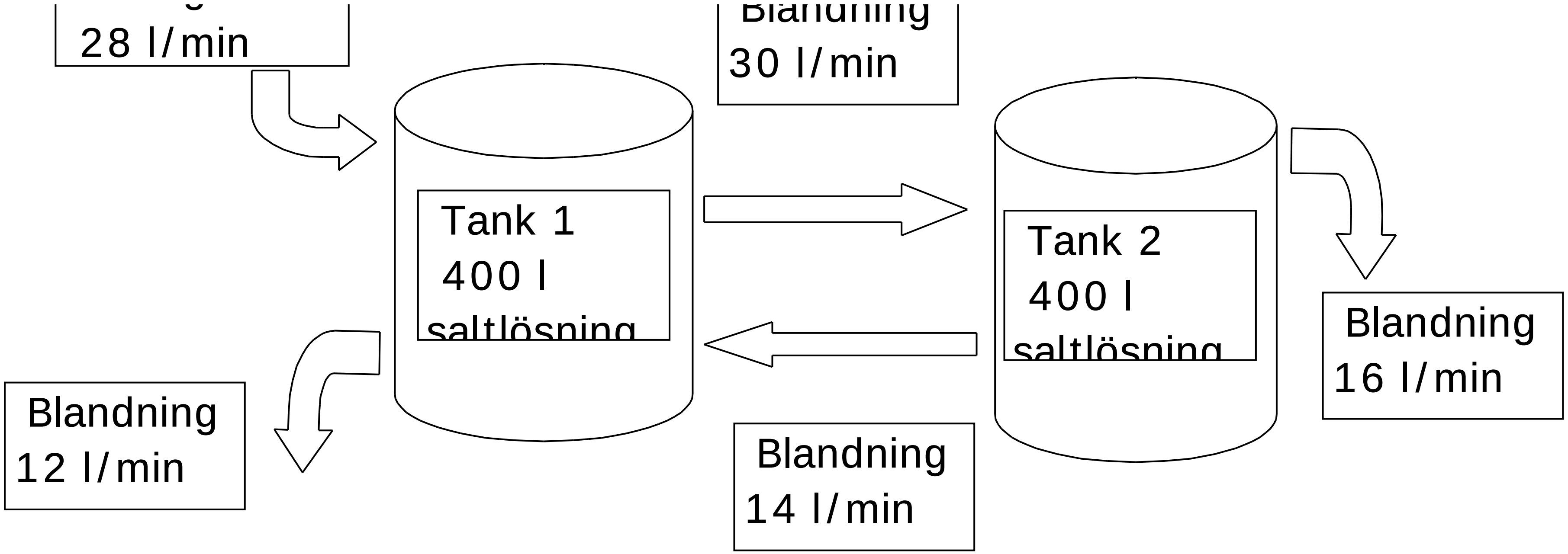
$A = \lim y(x)$, då $x \to \infty$ beror av startvärdet $y(0)$.

$$
\begin{cases}
y(0) > 2 & A = \infty \\
y(0) = 2 & A = 2 \\
-1 < y(0) < 2 & A = 1 \\
y(0) = -1 & A = -1 \\
y(0) < -1 & A = -\infty
\end{cases}
$$

4.

0.2 kg salt / l

Blandning



Låt $S_1(t)$ vara saltmängden i kg i tank nr 1 vid tiden t.

Låt $S_2(t)$ vara saltmängden i kg i tank nr 2 vid tiden t.

$$\frac{\mathrm{dS}_1(t)}{dt} = 0.2kg/l \;\; x \;\; 28l/\min - \frac{\mathrm{S}_1(t)}{400} kg/l \;\; x \;\; 30l/\min +$$

$$+\frac{S_2(t)}{400}\,kg/l\ \ x\ \ 14l/\min-\frac{S_1(t)}{400}\,kg/l\ \ x\ \ 12l/\min$$

$$\frac{dS_2(t)}{dt}=\frac{S_1(t)}{400}\,kg/l\ \ x\ \ 30l/\min-\frac{S_2(t)}{400}\,kg/l\ \ x\ \ 14l/\min$$

$$-\frac{S_2(t)}{400}\,kg/l\ \ x\ \ 16l/\min$$

$$\frac{dS_1(t)}{dt}=5.6-\frac{21S_1(t)}{200}\ \ 30+\frac{7S_2(t)}{200}$$

$$\frac{dS_2(t)}{dt}=\frac{3S_1(t)}{40}-\frac{3S_2(t)}{40}$$

5.

$$f(t)=1-2\int^{t} e^{-3\tau} f(t-\tau)\,d\tau$$

$$\int_0$$

Laplacetransformera.

$$\mathrm{F(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}} - 2\frac{1}{s+3}F(s)$$

$$F(s)\frac{s+3+2}{s+3} = \frac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{s+3}{s(s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{2/5}{s+5}$$

$$f(t) = \frac{3+2e^{-5t}}{5}$$

6.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

Låt $\Phi(\mathbf{t})$ vara en fundamentalmatris till systemet.

Allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ kan skrivas $\mathbf{x_h} = \Phi(\mathbf{t})\mathbf{C}$, där $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.

Ansätt $\mathbf{x_p} = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$.

$$\Phi'\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{f}$$

$$(\Phi' - \mathbf{A}\Phi)\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{f}$$

$$\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt$$

$$\mathbf{x_p} = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt$$

Allmänna lösningen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ resp $\lambda_2 = 2$.

Matrisen $A = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ resp $\lambda_2 = 2$.

Motsvarande egenvektorer blir : $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Två linjärt oberoende lösningar till $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ är $e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Motsvarande fundamentalmatris är $\Phi(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} e^{t} & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

$$\det \Phi(\mathrm{t}) = e^{3t}$$

$$\Phi^{-1}(\mathrm{t}) = e^{-3t}\begin{pmatrix} e^{2t} & -4e^{2t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -4e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}' = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -4e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{pmatrix} -3t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_p} = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{pmatrix} e^{t} & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3te^{t} - 4e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{t} & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} -(3t+4)e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix},$$ där $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.

7.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & -2 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Periodiska lösningar inträffar.

$$\Leftrightarrow$$

Systemets egenvärden är rent imaginära.

Rent imaginära egenvärden :

$$\begin{cases} \tau = a + 1 = 0 \\ \tau^2 - 4\Delta = (a+1)^2 + 4a < 0 \end{cases}$$

För $a = -1$ erhålles periodiska lösningar.

8.

$$f(x) = 2x^2 - 1\ ,\ -1 < x < 1\ ,\ \ f(x+2) = f(x).$$

Funktionen är jämn,

vilket innebär att utvecklingen är en cosinusserie.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{} + \sum^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{1}$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 (2x^2 - 1)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= 2\left\{\left[(2x^2 - 1)\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 4x\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{8}{(n\pi)^2}\cos n\pi = \frac{8(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (2x^2 - 1)\,dx = 2(2/3 - 1) = -2/3.$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$$

$$f(x) = -\frac{\;}{3} + \sum_{n=1} \frac{\;}{(n\pi)^2} \cos n\pi x$$

9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [\ 1\ ]$$

Randvillkor : $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad [\ 2\ ]\ \&\ [\ 3\ ]$

Begynnelsevillkor :

$u(x,0) = 0 \quad [\ 4\ ]$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \begin{cases} h & \text{då } 1/4 < x < 3/4 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \qquad [\ 5\ ]$$

Variabelseparationsansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$

ger i de linjära ekvationerna [1] -[3]:

$$X''T = XT'',\quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \text{konstant} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & [\ 6\ ] \\ T'' - \lambda T = 0 & [\ 7\ ] \end{cases}$$

$$X(0) = X(1) = 0 \quad [\ 8\ ]$$

$T'' - \lambda T = 0$ [7]

[6] ger icke - triviala lösningar endast då $\lambda < 0$.

$\lambda = -\mu^2$, $\mu \quad R$ ger följande lösning :

$$X(x) = A\cos\frac{\mu\pi x}{1} + B\sin\frac{\mu\pi x}{1}$$

[8] ger $A = 0$ och $\mu = n$. $X(x) = B_n \sin n\pi x$.

Motsvarande lösning till [7] blir då

$$T(t) = C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t$$

Variabelseparationen och [4] ger : $T(0) = 0$. $C_n = 0$.

Funktionen $u_n(x,t) = B_n \sin n\pi x \sin n\pi t$ satisfierar [1] - [4].

Lineariteten ger att summan $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x \sin n\pi t$

har denna egenskap.

Villkoret [5] ger : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin n\pi x = g(x).$

$$n\pi B_n = \frac{2}{1}\int_0^1 g(x)\sin n\pi x dx = 2\int_{1/4}^{3/4} h\sin n\pi x dx = \frac{2h}{n\pi}(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4})$$

$$B_n = \frac{2h}{(n\pi)^2}(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4})$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h}{(n\pi)^2}(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4})\sin n\pi x \sin n\pi t$$