1.

$$(x + x^2)y' = y - y^2 \ , \ y(1) = 2.$$

Konstantlösningar : $y = 0$, $y = 1.$

$$\frac{y'}{y - y^2} = \frac{1}{x + x^2}$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}\right) dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}\right) dx$$

$$\ln|y| - \ln|1 - y| = \ln|x| - \ln|1 + x| + \ln|C_1|$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{C_1 x}{1+x}\right| \ , \quad \frac{y}{1-y} = \frac{Cx}{1+x}$$

Bestäm konstanten C: $\quad y(1) = 2 \ , \ -2 = \frac{C}{2} \ , \ C = -4.$

$$y(1+x) = -4x(1-y) \ , \quad y(1-3x) = -4x$$

$$y = \frac{4x}{3x-1} \ , \quad x > \frac{1}{3}.$$

2.

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

Karakteristiska ekvationen : $r^3 - r^2 - r + 1 = 0.$

$$(r-1)(r^2-1) = (r-1)^2(r+1) = 0.$$

Lösningarna ges av : $y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x, y_3 = e^{-x}.$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -2e^{-x} \\ 0 & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 4e^x \neq 0$$

3.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x + xy \\ 4y - 2xy \end{pmatrix}$$

Stationära punkter : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy \\ 4y - 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1+y) \\ 2y(2-x) \end{pmatrix}.$

$(0,0)$ och $(2,-1)$ är de stationära punkterna.

Jacobimatrisen $J(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y & x \\ -2y & 4-2x \end{pmatrix}.$

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 1 och 4.

$J(0,0) = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 1 och 4.

Motsvarande egenvektorer är $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(0,0) är en instabil nod.

$J(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena ± 2.

Motsvarande egenvektorer är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(2,-1)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

$$\begin{pmatrix} x \\ \dots \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x + xy \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x + xy \\ 4y - 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ -2xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'.$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u + 2 + (u+2)(v-1) \\ 4(v-1) - 2(u+2)(v-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 2u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} uv \\ -2uv \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} uv \\ -2uv \end{pmatrix}$$

4.

dT

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)\ ,\ \ T(10) = 105°C\ ,\ \ T(30) = 65°C.$$

$$\text{Sökt :}\quad t_1 : T(t_1) = 35°C.$$

$$\int \frac{dT}{T - 25} = -\int k\,dt\ ,\ \ \ln|T - 25| = -kt + C$$

Villkoren ger följande ekvationer :

$$\ln|105 - 25| = -k10 + C \qquad [\ 1\ ]$$

$$\ln|65 - 25| = -k30 + C \qquad [\ 2\ ]$$

$$\ln|35 - 25| = -kt_1 + C \qquad [\ 3\ ]$$

$$[\ 1\ ] - [\ 2\ ]:\ \ \ln 80 - \ln 40 = k20 \qquad [\ 4\ ]$$

$$[\ 2\ ] - [\ 3\ ]:\quad \ln 40 - \ln 10 = k(t_1 - 30) \qquad [\ 5\ ]$$

$$[\ 5\ ]/[\ 4\ ] \qquad \frac{t_1 - 30}{20} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2.$$

$$\boxed{t_1 = 70}$$

5.

$$y'' + 4y' - 5y = (5t - 4)U(t-1)\ ,\ \ y(0) = 1\ ,\ \ y'(0) = -5.$$

$$f(t-1) = 5t-4 = 5(t-1)+1\,, \quad f(t) = 5t+1.$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) - 5Y(s) = e^{-s}\left(\frac{5}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$Y(s)(s^2 + 4s - 5) = s - 1 + e^{-s}\,\frac{5+s}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+5} + e^{-s}\,\frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s+5} + e^{-s}\left(\frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) = -t - 1 + e^{t}$$

$$y(t) = e^{-5t} + U(t-1)(-(t-1) - 1 + e^{t-1})$$

6.

$$y' = e^{y} + e^{-y} - 4 = f(y)$$

$y' = e^{y} + e^{-y} - 4 = f(y)$

Ekvationen är autonomt och dess jämviktspunkter ges av :

$$f(y) = e^{y} + e^{-y} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2y} - 4e^{y} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{y} = 2 \pm \sqrt{4-1} \Leftrightarrow e^{y} = 2 \pm \sqrt{3}\ ,\ \{2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}\}.$$

Jämviktspunkter : $y = \pm \ln(2+\sqrt{3})$.

y		$-\ln(2+\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

$$- - - \rightarrow -\ln(2+\sqrt{3}) \quad \leftarrow - - - \leftarrow \ln(2+\sqrt{3}) \rightarrow$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}\circ\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\circ\underline{\qquad\qquad} y$$

$$\begin{cases} y(0) > \ln(2+\sqrt{3}) & A = \infty \\ y(0) = \ln(2+\sqrt{3}) & A = \ln(2+\sqrt{3}) \\ y(0) < \ln(2+\sqrt{3}) & A = -\ln(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

7.

$f(t)$ är av expontiell ordning(typ)

$$\Leftrightarrow$$

$|f(t)| \leq Me^{ct}$, M och c är några konstanter

$|f(t)| \le Me^{ct}$, M och c är några konstanter,
gäller för alla $t > T_0$, T_0 är också någon konstant.

$f(t)$ kontinuerlig innebär att $|f(t)|$ har något
största värde, m_1 , på intervallet $0 \le t \le T_0$,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{T_0} e^{-st} f(t)dt + \int_{T_0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Triangelolikheten ger :

$$|F(s)| \le \int_0^{T_0} e^{-st} |f(t)| dt + \int_{T_0}^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \le$$

$$\leq \int_0^{T_0} e^{-st} m_1 \, dt + \int_{T_0}^{\infty} e^{-st} M e^{ct} dt =$$

$$= m_1 \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{T_0} + M \left[-\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \right]_{T_0}^{\infty} = \{ s > c \} =$$

$$= m_1 \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} + M \frac{e^{-(s-c)T_0}}{s-c} \to m_1 \;\; 0 + M \;\; 0 = 0 \;, \;\; s \to \infty$$

8.

Låt $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ vara linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{A}$ är en nxn - matris. Då ges en fundamentalmatris av $\Phi = (\mathbf{X}_1 \;\; \mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_n)$.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) - 3(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)^2 - 4\} = (1-\lambda)(1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Egenvärdena är : $\lambda = 1$ $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$

Egenvärdena är : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -1$.

Bestäm motsvarande egenvektorer.

$$\lambda_1 = 1 \text{ ger } \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & -3 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \ , \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \ , \ \mathbf{K} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ ger } \begin{pmatrix} 1-3 & -1 & -3 \\ -1 & 1-3 & 0 \\ -1 & 0 & 1-3 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \ , \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \ , \ \mathbf{K} = k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1 \text{ ger } \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & -3 \\ -1 & 1+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \ , \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0} \ , \ \mathbf{K} = k_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tre linjärt oberoende lösningar till systemet ges av

$$e^{t}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix},\quad e^{3t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{och}\quad e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

En fundamentalmatris till systemet är

$$\begin{pmatrix}0 & 2e^{3t} & -2e^{-t}\\ -3e^{t} & e^{3t} & e^{-t}\\ e^{t} & e^{3t} & e^{-t}\end{pmatrix}$$

9.

$$u'_x = u'_y + u \quad , \quad u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

Variabelseparation ger : $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Insättning i PDE ger : $X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) + X(x)Y(y)$

Dividera med X(x)Y(y): $\dfrac{X'(x)}{X(x)} = \dfrac{Y'(y)}{Y(y)} + 1 = \text{konstant} = \lambda.$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}$$

Vi får lösningarna : $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda - 1)y} \end{cases}$

Funktionen $u(x, y) = Ce^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$ satisfierar den givna differentialekvationen för alla konstanter C och λ.

Ekvationen är linjär och homogen innebär att varje linjärkombination satisfierar ekvationen $u(x, y) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$.

Villkoret : $u(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x} = \sum C e^{\lambda x}$ ger $C = 3$, $C = 2$

Villkoret: $u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x} = \sum_{\lambda} C_\lambda e^{\lambda x}$ ger $C_{-5} = 3$, $C_{-3} = 2$.

$$\boxed{u(x,y) = 3e^{-5x+(-5-1)y} + 2e^{-3x+(-3-1)y} = 3e^{-5x-6y} + 2e^{-3x-4y}}$$