Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200 och Diff & Trans I för LV, 5B1220.
Repetitionskursens tentamen.
Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

DEL1:

Block 1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - y\sin x = -2e^{\cos x}\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$.

Lösning:
Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen. Vi bestämmer en integrerande faktor.
En sådan är $e^{-\int \sin x dx} = e^{\cos x}$. Multiplicera differentialekvationen med $e^{\cos x}$.
Då erhålles $e^{\cos x}y' - ye^{\cos x}\sin x = -2e^{\cos x}e^{\cos x}\sin x$, $(ye^{\cos x})' = e^{2\cos x}(-2\sin x)$.
Integrera med avseende på x : $ye^{\cos x} = e^{2\cos x} + C$. Villkoret ger värdet på konstanten: $C = 1$.
Den sökta lösningen är $y = e^{\cos x} + e^{-\cos x}$.
SVAR: Begynnelsevärdesproblemet har lösningen $y = e^{\cos x} + e^{-\cos x}$.

Block 2. Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = 0$, $x > 0$
samt en partikulärlösning till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = e^x$, $x > 0$.
Lösning:
Den givna differentialekvationen är linjär. En strategi är att bestämma en lösning till den homogena differentialekvationen och därefter reducera ordningen. Den homogen differentialekvationen kan omformas till följande differentialekvation: $y'' - 2y' + y = 0$.
En lösning till denna ges av $y_1 = e^x$ .Sätt nu $y = e^x z(x)$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger oss följande differentialekvation:
$e^x x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$, vilken förenklad blir $z'' = \frac{1}{x}$.
Integration ger oss $z' = \ln x + C_1$. Upprepad integration ger: $z = x\ln x - x + C_1 x + C_2$.
Allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = e^x z = e^x(x\ln x - x + C_1 x + C_2) = C_1 xe^x + C_2 e^x + e^x(x\ln x - x).$$

En partikulärlösning är $y_p = e^x(x\ln x - x)$.
En fundamentalmängd av lösningar består av två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen.
I vårt fall har vi $\{xe^x, e^x\}$, ty dessa är linjärt oberoende.
SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{xe^x, e^x\}$. En partikulärlösning är $y_p = e^x(x\ln x - x)$.

Block3. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3$, $1 \le t \le 2$ och noll för övrigt.
Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.
Lösning:
Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = F(s)$.
Insättning av begynnelsevillkoren ger $Y(s) = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{F(s)}{s^2+9}$.
För bestämning av högerledets Laplacetransform använder vi dess definition.(Heaviside går också bra.)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_1^2 3e^{-st}dt = \frac{3(e^{-s} - e^{-2s})}{s}.$$

Den sökta lösningens Laplacetransform är $Y(s) = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{3(e^{-s} - e^{-2s})}{s(s^2+9)} = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{1}{3}(e^{-s} - e^{-2s})(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9})$.
Återtransformering ger oss vår sökta lösning:

$$y(t) = \cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}U(t-1)(1 - \cos 3(t-1)) - \frac{1}{3}U(t-2)(1 - \cos 3(t-2)).$$

Här är $U(t-a)$ Heavisidefunktionen.
SVAR: Den sökta lösningen är

$$y(t) = \cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}U(t-1)(1-\cos 3(t-1)) - \frac{1}{3}U(t-2)(1-\cos 3(t-2)).$$

Block 4. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$.

Lösning:

Vi skriver det givna systemet på formen: $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Egenvärden och egenvektorer till matrisen bestämmes.

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dess egenvärden erhålles ur ekvatioen

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4).\ \lambda_1 = -1 \text{ och } \lambda_2 = 4.$$

Motsvarande egenvektorer erhålles ur systemet: $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\underline{\lambda_1 = -1}$ ger: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 4}$ ger: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ och

$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t} = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$. Vi får $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

Block 5. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Låt matrisen $\mathbf{A}$ vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2.

Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)

a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.

b $\lambda_{1,2} = -1 \pm 9i$.

c) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$.

Lösning:

a) I detta fall är egenvärden reella och med olika tecken. Således är det en sadelpunkt och därmed instabil.

b) Komplexa egenvärden med realdelen skild ifrån noll.

Detta är en spiral och negativ realdel medför att spiralen är stabil.

c) Reella och skilda egenvärden ger en nod och negativa egenvärden medför stabilitet.

SVAR: a) Sadelpunkt, instabil.

b) Stabil spiral.

c) Stabil nod.

Block 6. Bestäm den funktion, $u(x,t)$, som uppfyller differentialekvationen $u_t' = u_x'$ och villkoret $u(x,0) = 7e^{x} + 5e^{3x}$.

Lösning:

Vi använder variabelseparationsmetoden, dvs vi sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ och sätter in detta i den givna partiella differentialekvationen. Vi får då: $X(x)T'(t) = X'(x)T(t)$, dividera med $X(x)T(t)$. Då erhålles $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X'(x)}{X(x)}$.

Denna kvot är konstant, ty vänstra ledet beror endast av t och högra ledet beror endast av x . Kalla konstanten för λ.

Vi får då ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X'(x) = \lambda X(x) \end{cases}$.

Detta system har den allmänna lösningen $\begin{cases} T(t) = Ae^{\lambda t} \\ X(x) = Be^{\lambda x} \end{cases}$ vilket ger $u(x,t) = Be^{\lambda x}Ae^{\lambda t} = Ce^{\lambda(x+t)}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösning till differentialekvationen. Vi skall bestämma den lösning som uppfyller villkoret $u(x,0) = 7e^{x} + 5e^{3x}$. Den sökta lösningen är $u(x,t) = 7e^{(x+t)} + 5e^{3(x+t)}$.

SVAR: Den sökta funktionen är $u(x,t) = 7e^{(x+t)} + 5e^{3(x+t)}$.

DEL2:

11.a) Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' + 4y - x + 3 = 0$, $y(x_0) = 0$.

Bestäm ett värde på x_0 för vilket grafen till lösningen till begynnelsevärdesproblemet tangerar x-axeln i punkten $(x_0,0)$.

b) Låt $y = y_1(x)$ vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$.

Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$ giltig där $y \neq 0$.

c) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + P(x)y = 4x$, $y(0) = 3$,

där $P(x) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$

Lösning:

a) Lösningskurvan tangerar x-axeln i punkten $(x_0,0)$ då derivatan är noll där.

Insättning i differentialekvationen ger: $0 + 0 - x_0 + 3 = 0$, $x_0 = 3$.

b) Vi ansätter $y = y_1(x)z(x)$ och sätter in i den inhomogena differentialekvationen.

Vi får $y_1'(x)z(x) + y_1(x)z'(x) + P(x)y_1(x)z(x) = f(x)$, $y_1(x)z'(x) + (y_1'(x) + P(x)y_1(x))z(x) = f(x)$.

$y = y_1(x)$ är en lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$ vilket leder till att $y_1(x)z'(x) = f(x)$.

Vi får $z'(x) = \dfrac{f(x)}{y_1(x)}$. Integrera med avseende på x : $z(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx + A$.

Den allmänna lösningen ges av $y = y_1(x)z(x) = y_1(x)\left(\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx + A\right) = Ay_1(x) + y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$.

En partikulärlösning ges av $y_p = y_1(x)\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$.

c) Differentialekvationen är linjär av första ordningen och den löses med hjälp av integrerande faktor.

Vi skriver först om differentialekvationen: $\begin{cases} y' + 2y = 4x \ , & 0 \le x \le 1 \\ y' - \dfrac{2}{x}y = 4x \ , & x > 1 \end{cases}$.

Hela ekvationen multipliceras med integrerande faktor, vilken ges av $\begin{cases} e^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} \ , & x > 1 \end{cases}$.

Vi får $\begin{cases} y'e^{2x} + 2e^{2x}y = 4xe^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ y'\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{1}{x^2}y = 4x\dfrac{1}{x^2} \ , & x > 1 \end{cases}$ eller $\begin{cases} (ye^{2x})' = 4xe^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ (y\dfrac{1}{x^2})' = 4\dfrac{1}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$.

Integrera med avseende på x : $\begin{cases} ye^{2x} = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1 \ , & 0 \le x \le 1 \\ y\dfrac{1}{x^2} = 4\ln x + C_2 & , \ x > 1 \end{cases}$.

Villkoret $y(0) = 3$ ger tillsammans med ekvationen $ye^{2x} = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1$ att $C_1 = 4$.

Insättning ger: $\begin{cases} y = 2x - 1 + 4e^{2x} & , \ 0 \le x \le 1 \\ y\dfrac{1}{x^2} = 4\ln x + C_2 & , \ x > 1 \end{cases}$. Det återstår att bestämma konstanten C_2 .

Kontinuerlig lösning söktes och kontinuitetsvillkoret ger: $2x - 1 + 4e^{2x}|_{x=1} = x^2(4\ln x + C_2)|_{x=1}$.

Konstanten blir $C_2 = 1 + 4e^2$ och den sökta lösningen blir $\begin{cases} y = 2x - 1 + 4e^{2x} & , \ 0 \le x \le 1 \\ y = x^2(4\ln x + 1 + 4e^2) & , \ x > 1 \end{cases}$

SVAR: a) $x_0 = 3$

b) Se ovan.

c) Den sökta lösningen är $\begin{cases} y = 2x - 1 + 4e^{2x} & , \ 0 \le x \le 1 \\ y = x^2(4\ln x + 1 + 4e^2) & , \ x > 1 \end{cases}$.

12.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a,b]$.
Låt vidare $y = f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$.
Bestäm f :s utveckling i den ortogonala funktionsföljden.

b) Utveckla $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ -\pi < x < 0 \\ \pi - x \ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1, \ \cos nx, \ \sin mx\}, \ n = 1,2,3,.., \ \ m = 1,2,3,...$.

c) Bestäm seriens värde för $x = 0$.

Lösning:

a) Låt den givna följden av ortogonala funktioner ges av $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}$.

Skriv $f(x)$ som en linjärkombination av de ortogonala funktionerna.

$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots.$

Multiplicera ekvationen med $\varphi_m(x)$ och integrera över intervallet $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)dx + c_2\int_a^b \varphi_2(x)\varphi_m(x)dx + \ldots + c_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx + \ldots$$

Eftersom den givna funktionsföljden är ortogonal blir varje integral på höger sida lika med noll utom då $n \neq m$.

Ekvationen blir då $\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_m\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx$, dvs $c_m = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}$.

Den sökta utvecklingen blir $f(x) = \sum_{m=1} c_m\varphi_m(x) = \sum_{m=1} \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}\varphi_m(x)$.

b) Vi bestämmer koefficienterna i utvecklingen $f(x) = c_1 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx$.

$$c_1 = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_1(x)dx}{\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1(x)dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)1dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)dx}{2\pi} = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\cos nxdx}{\int_a^b \cos nx \cos nxdx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx}{\pi}$$

$$a_n = \frac{\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin nx}{n}dx}{\pi} = \frac{\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2}$$

$$b_m = \frac{\int_a^b f(x)\sin mxdx}{\int_a^b \sin mx \sin mxdx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin mxdx}{\pi}$$

$$b_m = \frac{\left[(\pi - x)\frac{-\cos mx}{m}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{-\cos mx}{m}dx}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{m} - \left[-\frac{\sin mx}{m^2}\right]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{1}{m}$$

Den sökta utvecklingen är: $f(x) = \frac{\pi}{4}1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mx$.

c) Seriens värde för $x = 0$ erhålles som medelvärdet av funktion i detta språng.
Vi får att värdet är $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$.

SVAR: a) $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}\varphi_m(x)$ b) $f(x) = \frac{\pi}{4}1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mx$ c) $\frac{\pi}{2}$.

13. Härled utgående från definitionen Laplacetransformationen för funktionen $f_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h}, & a \le t \le a+h \\ 0, & t < a,\ t > a+h \end{cases}$.

Benämn denna transformation $L\{f_h(t)\}$. Låt $h \to 0$, dvs bestäm gränsvärdet $\lim_{h \to 0} L\{f_h(t)\}$.

Lös slutligen begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 8y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, då $f(t) = \lim_{h \to 0} f_h(t)$.

Omkastning av gränsövergång och integration förutsättes tillåten.

Lösning:
Insättning i Laplacetransformationens definition ger:

$$L\{f_h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_h(t)\,dt = \int_a^{a+h} e^{-st}\frac{2}{h}\,dt = \left[e^{-st}\frac{2}{-sh}\right]_a^{a+h} = \frac{2}{sh}\left(e^{-sa} - e^{-s(a+h)}\right) = \frac{2e^{-sa}}{sh}(1 - e^{-sh})$$

.

Nu över till gränsövergången och här använder vi MacLaurinutveckling av exponentialfunktionen.

$$\lim_{h\to 0} L\{f_h(t)\} = \lim_{h\to 0}\frac{2e^{-sa}}{sh}(1 - e^{-sh}) = \lim_{h\to 0}\frac{2e^{-sa}}{sh}(1 - (1 + (-sh) + h^2H(h))) = \lim_{h\to 0} 2e^{-sa}(1 + hH(h))$$

.

Laplacetransformera differentialekvationen:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 8Y(s) = 2e^{-sa}$$

Insättning av begynnelsevillkoren ger:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 8} + \frac{2}{s^2 + 4s + 8}e^{-sa}$$

Kvadratkomplettera nämnaren.

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)^2 + 4} + \frac{2}{(s+2)^2 + 4}e^{-sa}$$

Återtransformera:

$$y(t) = e^{-2t}\sin 2t + U(t-a)e^{-2(t-a)}\sin 2(t-a)$$

SVAR: $L\{f_h(t)\} = \dfrac{2e^{-sa}}{sh}(1 - e^{-sh})$, $\lim\limits_{h\to 0} L\{f_h(t)\} = 2e^{-sa}$,

$y(t) = e^{-2t}\sin 2t + U(t-a)e^{-2(t-a)}\sin 2(t-a)$.

14. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$

Lösning:
a) En fundamentalmatris består av linjärt oberoende kolonner, vilka är lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Antalet kolonner är lika med ordningen hos den kvadratiska matrisen $\mathbf{A}$.
b) Den givna fundamentalmatrisen Φ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, dvs $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.
Härur kan den konstanta matrisen $\mathbf{A}$. Multiplicera $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$ från höger med inversen till fundamentalmatrisen Φ.
Då erhålles $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$, där Φ^{-1} är invers till fundamentalmatrisen Φ.
c) För att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ använder vi varaition av parametrar och ansätter en partikulärlösning på formen $\mathbf{X}_p = \Phi\mathbf{U}(t)$.

Insättning i det inhomogena systemet ger: $(\Phi\mathbf{U}(t))' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$

Derivera: $\Phi'\mathbf{U}(t) + \Phi\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$.

Omforma: $(\Phi' - \mathbf{A}\Phi)\mathbf{U}(t) + \Phi\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$.

Fundamentalmatrisens kolonner är lösningar till det homogena systemet vilket innebär att $\Phi' - \mathbf{A}\Phi = \mathbf{0}$.

Vi får då $\Phi\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$. Multiplicera från vänster med fundamentalmatrisens invers Φ^{-1}.

Det ger $\mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}\mathbf{F}$. Integrera med avseende på t: $\mathbf{U}(t) = \int\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$.

Vår sökta partikulärlösning är $\mathbf{X}_p = \Phi\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$.

SVAR: a) Se ovan, b) $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$, c) $\mathbf{X}_p = \Phi\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$.