

Tentamensskrivning för junirepetitionskursen i Diff & Trans I, 5B1200 och Diff & Trans I för LV, 5B1220.

Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 block. För godkänt krävs att alla blocken är godkända.

Godkända block från repetitionskursen i juni 2004 får tillgodoräknas.

Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.

Poängfördelningen på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.

För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del2.

För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del2.

DEL1:

Block 1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - y \sin x = 2e^{\cos x} \sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$.

Block 2. Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = 0$, $x > 0$ samt en partikulärlösning till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = e^x$, $x > 0$.

Block 3. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3$, $1 \leq t \leq 2$ och noll för övrigt. Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.

Block 4. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Block 5. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Låt matrisen \mathbf{A} vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2 .

Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)

a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.

b) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 9i$.

c) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$.

Block 6. Bestäm den funktion, $u(x, t)$, som uppfyller differentialekvationen $u_t = u_x$ och villkoret $u(x, 0) = 7e^{-x} + 5e^{3x}$.

DEL2:

11.a) Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' - x + 3 = 0$, $y(x_0) = 0$.

Bestäm ett värde på x_0 för vilket grafen till lösningen till begynnelsevärdesproblemet tangerar x-axeln i punkten $(x_0, 0)$.

b) Låt $y = y_1(x)$ vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen $y'' + P(x)y = 0$.

Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + P(x)y = f(x)$ giltig där $y \neq 0$.

c) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y'' + P(x)y = 4x$, $y(0) = 3$,

$$P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2/x, & x > 1 \end{cases}$$

där $P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2/x, & x > 1 \end{cases}$

12.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a, b]$.

Låt vidare $y = f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$.

Bestäm f 's utveckling i den ortogonala funktionsföljden.

b) Utveckla $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1, \cos nx, \sin mx\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

c) Bestäm seriens värde för $x = 0$.

13. Härled utgående från definitionen Laplacetransformationen för funktionen $f_h(t) = \begin{cases} 2/h, & a \leq t \leq a+h \\ 0, & t < a, t > a+h \end{cases}$.

Benämna denna transformation $L\{f_h(t)\}$. Låt $h \rightarrow 0$, dvs bestäm gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0} L\{f_h(t)\}$.

Lös slutligen begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 8y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, då $f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h(t)$.

Omkastning av gränsovergång och integration förutsättes tillåten.

14. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.

b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen \mathbf{A} .

c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$