10.3.30.

$$\boxed{x'' + \varepsilon\left(\frac{1}{3}(x')^3 - x'\right) + x = 0}$$

$$\boxed{\text{Sätt: } y = x'.}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \varepsilon\left(-\frac{1}{3}y^3 + y\right) - x \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{X})}$$

$$\boxed{\text{Kritiska punkter: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \varepsilon\left(-\frac{1}{3}y^3 + y\right) - x \end{pmatrix} = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{(0,0)}$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon(-y^2+1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta = 1 > 0 \\ \tau = \varepsilon \\ \tau^2 - 4\Delta = \varepsilon^2 - 4 \end{cases}$$

$(0,0)$ är instabil då $\tau > 0$, dvs $\varepsilon > 0$.

$(0,0)$ är instabil spiralpunkt då $\begin{cases} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon^2 - 4 < 0 \end{cases}$

$$0 < \varepsilon < 2$$

$(0,0)$ är stabil då $\tau < 0$, dvs $\varepsilon < 0$.

$(0,0)$ är stabil spiralpunkt då $\begin{cases} \varepsilon < 0 \\ \varepsilon^2 - 4 < 0 \end{cases}$

$$-2 < \varepsilon < 0$$

För $\varepsilon = 0$ erhålles: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Egenvärdena är $\lambda = \pm i$. $(0,0)$ är center.