$\boxed{12.4.1.}$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ . Vågekvationen.}$$

Variabelseparation.

Ansats: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \text{konstant} = \lambda$$

Ett system av okopplade ODE erhålles.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$$

Linjära med konstanta koefficienter.

Tre olika fall : $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \quad R$.

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$$

$\boxed{\text{Lösningarna ges av } X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}.}$

$\boxed{\text{Motsvarande för "T-ekvationen" ger: } T(t) = C_1 e^{a\mu t} + D_1 e^{-a\mu t}.}$

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$\boxed{X''(x) = 0}$$

$$\boxed{X(x) = A_2 x + B_2}$$

$$\boxed{T(t) = C_2 t + D_2}$$

$$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \quad R.$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$T(t) = C_3 \cos a\mu t + D_3 \sin a\mu t$$

Vi söker den lösning som uppfyller de givna randvillkoren.

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Därefter anpassar vi lösningen till begynnelsevillkoren.

$$u(x,0) = \frac{1}{4}x(L - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Substitutionen ger att randvillkoren kan skrivas

$0 = u(0,t) = X(0)T(t)$

$0 = u(L,t) = X(L)T(t)$

Dessa samband skall gälla för alla t.

Detta innebär att : $0 = X(0),\ 0 = X(L).$

Vi studerar de tre olika fallen.

$$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \quad R.$$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$.

$$0 = X(0) = A_1 + B_1$$

$$0 = X(L) = A_1 e^{\mu L} + B_1 e^{-\mu L}$$

$$B_1 = -A_1$$

$$A_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0$$

Endast den triviala lösningen $A_1 = B_1 = 0$.

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$\boxed{X(x) = A_2 x + B_2}$$

$$\boxed{T(t) = C_2 t + D_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= X(0) = B_2 \\ 0 &= X(L) = A_2 L + B_2 \end{aligned}}$$

Endast den triviala lösningen $A_2 = B_2 = 0$.

$$\lambda < 0, \ \lambda = -\mu^2, \ \ \mu \quad R.$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$0 = X(0) = A_3$$

$$0 = X(L) = A_3 \cos \mu L + B_3 \sin \mu L$$

$$B_3 \sin \mu L = 0$$

$B_3 = 0$ ger endast den triviala lösningen.

Däremot ger $\sin \mu L = 0$ följande: $\mu L = n\pi, \ \ n \quad Z.$

$$X(x) = B_3 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Motsvarande för "T - lösningen": $T(t) = C_3 \cos a\dfrac{n\pi}{L}t + D_3 \sin a\dfrac{n\pi}{L}t.$

En lösning som satisfierar differentialekvationen och de givna randvillkoren är :

$$\mathrm{u_n}(x,t) = B_3 \sin\frac{n\pi}{L}x \;\{\; C_3 \cos a\frac{n\pi}{L}t + D_3 \sin a\frac{n\pi}{L}t \;\}$$

Varje linjärkombination av lösningar är en lösning.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\; a_n \cos a\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin a\frac{n\pi}{L}t \;\}\; \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Det återstår nu att bestämma konstanterna a_n och b_n.

Begynnelsevillkoren ger oss dessa.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a\frac{n\pi}{L}\left\{-a_n \sin a\frac{n\pi}{L}t+b_n \cos a\frac{n\pi}{L}t\right\}\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

$$\boxed{u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L}x=\frac{1}{4}x(L-x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a\frac{n\pi}{L}b_n \sin\frac{n\pi}{L}x=0}$$

$$\boxed{b_n=0}$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{4}x(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=}$$

$$\boxed{=\frac{2}{L}\left\{\left[\frac{x(L-x)}{4}\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L-\int_0^L\frac{L-2x}{4}\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right\}=}$$

$$= \frac{2}{L}\{0 + \frac{L}{n\pi}\{\left[\frac{L-2x}{4}\,\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L - \int_0^L \frac{-2}{4}\,\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\;dx\}\} =$$

$$= \frac{2}{L}\{0 + \frac{L}{n\pi}\{\left[\frac{-2}{4}\,\frac{L}{n\pi}\,\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L\}\} = \frac{L^2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2m \\ \dfrac{2L^2}{(2m+1)^3\pi^3} & , \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\, a_n \cos a\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin a\frac{n\pi}{L}t \,\}\, \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\{\, \frac{2L^2}{(2m+1)^3\pi^3}\cos a\frac{(2m+1)\pi}{L}t\}\, \sin\frac{(2m+1)\pi}{L}x$$