8.3.20.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$$

Bestäm en fundamentalmatris , $\Phi(t)$.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_{2,3} = 2$$

Insättning i $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \ , \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{0} \ , \quad \mathbf{v}_{2,3} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_h = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

En fundamentalmatris $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} & 0 \\ e^{t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X_p} = \Phi(t)\mathbf{U} = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\mathbf{dt}$$

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-2t} & 0 & -e^{-2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}=\int \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-2t} & 0 & -e^{-2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}\mathbf{dt}=$$

$$=\int \begin{pmatrix} te^{-t}+2 \\ -2e^{-t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}\mathbf{dt}=\begin{pmatrix} -te^{-t}-e^{-t}+2t \\ 2e^{-t} \\ \frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} & 0 \\ e^{t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} + 2t \\ 2e^{-t} \\ \frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -t - 1 + 2te^{t} + 2e^{t} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \\ -t - 1 + 2te^{t} + 2e^{t} \\ -t - 1 + 2te^{t} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} te^{t}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} & 0 \\ e^{t} & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{C} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} te^{t}$$