Plana autonoma system och stabilitet.

10.1. Autonoma system.

Kritiska punkter. Periodiska lösningar.

10.2. Stabilitet hos linjära system.

10.3. Linjarisering och lokal stabilitet.

AUTONOMT SYSTEM

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$X' = g(X)$$

PLANT AUTONOMT SYSTEM

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y)\end{aligned}}$$

VEKTORFÄLT

$$\boxed{V(x,y) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)}$$

LÖSNINGSTYPER

STATIONÄR PUNKT

BÅGE

PERIODISK LÖSNING

STABILITET HOS LINJÄRA SYSTEM

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Determinanten

$$\boxed{\Delta = ad - bc \neq 0}$$

(0,0) är enda stationära punkten

$$\boxed{\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}-\lambda & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}-\lambda \end{vmatrix} = 0}$$

$$\boxed{\lambda^2 - \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} = 0}$$

Spåret $\boxed{\tau = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}}$

$$\boxed{\lambda^2 - \lambda\tau + \Delta = 0}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}}$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden

Två linjärt oberoende egenvektorer

En linjärt oberoende egenvektor

Komplexa egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{t}) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}}$$

$$\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{t}) = e^{\lambda_1 t}\left[c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t}\right]}$$

Bägge egenvärdena negativa

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta > 0\ ,\ \tau < 0\ ,\ \Delta > 0}$$

$$\boxed{\lambda_2 < \lambda_1 < 0}$$

Stabil nod

Bägge egenvärdena positiva

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta > 0\ ,\ \tau > 0\ ,\ \Delta > 0}$$

$$\boxed{0 < \lambda_2 < \lambda_1}$$

Instabil nod

Egenvärdena har olika tecken

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta > 0\ ,\ \ \Delta < 0}$$

$$\boxed{\lambda_2 < 0 < \lambda_1}$$

Sadelpunkt

Upprepade reella egenvärden

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta = 0}$$

Två linjärt oberoende egenvektorer

$$\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{t}) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} = (c_1 K_1 + c_2 K_2) e^{\lambda_1 t}}$$

$$\boxed{\lambda_1 < 0}$$

Degenererad stabil nod

$$\boxed{0 < \lambda_1}$$

Degenererad instabil nod

En linjärt oberoende egenvektor

$$\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{t}) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 (K_1 t + P) e^{\lambda_1 t}}$$

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{P} = K_1}$$

$$\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{t}) = t e^{\lambda_1 t} \left[c_2 K_1 + \frac{c_1}{t} K_1 + \frac{c_2}{t} P \right]}$$

$\boxed{\lambda_1 < 0}$ Degenererad stabil nod

$\boxed{0 < \lambda_1}$ Degenererad instabil nod

Komplexa egenvärden

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta < 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(c_{11}\cos\beta t + c_{12}\sin\beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t}(c_{21}\cos\beta t + c_{22}\sin\beta t) \end{aligned}}$$

Rent imaginära rötter

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta < 0 \ , \ \ \tau = 0}$$

Center

Komplexa rötter

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta < 0 \ , \ \ \tau \neq 0}$$

$\boxed{\alpha < 0}$ Stabil spiralpunkt

$\boxed{\alpha > 0}$ Instabil spiralpunkt

Stabilitetskriterium för linjära system

$$\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{AX}\ ,\ \mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{X_0} \neq \mathbf{0}\ ,\ \det(\mathbf{A}) \neq 0}$$

1 $$\boxed{\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\lambda < 0\ ,\ (\Delta > 0\ ,\ \tau < 0\ )}$$

2 $$\boxed{\mathbf{X}(t)\ \text{är periodisk} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\lambda = 0\ ,\ (\Delta > 0\ ,\ \tau = 0\ )}$$

3 I övriga fall finns det minst ett $\mathbf{X_0}$

för vilket $\mathbf{X}(t)$ blir obegränsat då t växer.

$\mathbf{X}_1$ kritisk punkt till $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$.

$\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ lösning som uppfyller $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$.

$\mathbf{X}_1$ är en stabil kritisk punkt då:

$$\rho > 0 \quad r > 0 : \left| \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1 \right| < r \quad \left| \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1 \right| < \rho , \quad t > 0.$$

Om dessutom $\lim_{t \to \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_1$ då $\left| \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1 \right| < r$

så kallas $\mathbf{X}_1$ en asymptotiskt stabil punkt.

$\mathbf{X}_1$ kritisk punkt till $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$.

$\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ lösning som uppfyller $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$.

$\mathbf{X}_1$ är en instabil kritisk punkt då:

$$\rho > 0 \qquad r > 0 \qquad \mathbf{X}_0 : |\, \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1 \,| < r$$

$$t > 0 \;:\; |\, \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1 \,| \geq \rho \quad .$$

$$x' = g(x) = g(x_1) + g'(x_1)(x - x_1) + \text{Restterm}$$

Låt x_1 vara en kritisk punkt, $g(x_1) = 0.$

$$x' = g'(x_1)(x - x_1) + \text{Restterm}$$

Den lineariserade ekvationen blir

$$x' = g'(x_1)(x - x_1)$$

Lösningen ges av: $x = x_1 + ce^{t\lambda_1}$ där $\lambda_1 = g'(x_1).$

Stabilitetskriterium för $x' = g(x)$.

Låt x_1 vara en kritisk punkt till $x' = g(x)$ och låt g vara deriverbar i x_1.

Om $g'(x_1) < 0$, då är x_1 en asymptotiskt stabil kritisk punkt.

Om $g'(x_1) > 0$, då är x_1 en instabil kritisk punkt.

$$\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}_1) + \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1) + \text{Restterm}$$

Låt $\mathbf{X}_1$ vara en kritisk punkt, $\mathbf{g}(\mathbf{X}_1) = 0.$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1) + \text{Restterm}$$

Den lineariserade ekvationen blir

$$\mathbf{X}' = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}_1$ är en kritisk punkt till $\mathbf{X}' = \mathbf{g}(\mathbf{X})$

$P(x,y) \quad C^1$ och $Q(x,y) \quad C^1$ i en omgivning av $\mathbf{X}_1$.

Låt λ_i vara egenvärde till $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{X}_1)$.

Om $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ så är $\mathbf{X}_1$ en asymptotiskt stabil kritisk punkt.

Om ett egenvärde är positivt så är $\mathbf{X}_1$ en instabil kritisk punkt.

Lineariserade - Icke lineara.

$$\text{Samma geometrisk beteende : } \begin{cases} \text{Stabil nod} \\ \text{Stabil spiralpunkt} \\ \text{Instabil nod} \\ \text{Instabil spiralpunkt} \\ \text{Sadelpunkt} \end{cases}$$

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta = 0\ ,\ \ \tau > 0\ :\ \text{Instabil}}$$

$$\begin{cases} \text{Instabil spiralpunkt ?} \\ \text{Instabil nod ?} \\ \text{Degenererad instabil nod ?} \end{cases}$$

$$\boxed{\tau^2 - 4\Delta = 0\ ,\ \ \tau < 0\ :\ \text{Stabil}}$$

$$\begin{cases} \text{Stabil spiralpunkt ?} \\ \text{Stabil nod ?} \\ \text{Degenererad stabil nod ?} \end{cases}$$

$$\boxed{\tau = 0\ ,\ \ \Delta > 0}$$

$$\begin{cases} \text{Stabil spiralpunkt ?} \\ \text{Instabil spiralpunkt ?} \\ \text{Center ?} \end{cases}$$

$$\text{Fas - plan - metoden: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$