Ortogonala funktioner och Fourierserier.

11.1. Ortogonala funktioner.

11.2. Fourierserier.

11.3. Fouriercosinus- och sinusserier.

Inreprodukt

$$(f_1 , f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx$$

Några trigonometriska formler

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

Ortogonalrelationer

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 \;,\; m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 \;,\; m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p}\,\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx = 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p}\,\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \begin{cases} 0 \;, & m \neq n \\ p \;, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi x}{p}\,\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx = \begin{cases} 0 \;, & m \neq n \\ p \;, & m = n \end{cases}$$

Funktionsföljden

$$\left\{ 1,\ \cos\frac{\pi x}{p},\ \cos\frac{2\pi x}{p},\ ..\cos\frac{m\pi x}{p}..,\ \sin\frac{\pi x}{p},\ \sin\frac{2\pi x}{p},\ ..\sin\frac{n\pi x}{p}.. \right\}$$

är ortogonal på intervallet $[-p,p]$ med den inre produkten

$$(f_1\ ,\ f_2\ )\ =\ \int_{-p}^{p} f_1(x) f_2(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Trigonometrisk serie}}$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p} \right)}$$

Fourierserien till en funktion f definierad på

intervallet $(-p,p)$ ges av

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} \left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)\right\} dx}$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{m\pi x}{p}\,dx = \int_{-p}^{p} \left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)\right\}\sin\frac{m\pi x}{p}\,dx}$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = \int_{-p}^{p} \left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)\right\}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx}$$

Konvergensvillkor

Låt f och f' vara styckvis kontinuerliga på intervallet $(-p,p)$.

Då konvergerar f:s Fourierserie mot $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

$$\boxed{\text{Fourierserier för udda och jämna funktioner.}}$$

Jämn funktion : $f(-x) = f(x), \qquad x \qquad I.$

Udda funktion : $f(-x) = -f(x), \qquad x \qquad I.$

Fourierserien för en jämn funktion på intervallet $(-p, p)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}$$

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx$$

Fourierserien för en udda funktion på intervallet $(-p, p)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p}$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$