

Partiella differentialekvationer och randvärdesproblem.

12.1. Separabla PDE

12.2. Klassiska ekvationer och randvärdesproblem.

12.3. Värmeledningsekvationen.

12.4. Vågekvationen.

12.5. Laplace ekvation.

# Partiella differentialekvationer, PDE.

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0. \quad \text{Värmeledningsekvationen.}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad \text{Vågekvationen.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \text{Laplace ekvation.}$$

# Variabelseparation.

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad \text{Vågekvationen.}$$

$$\text{Ansats : } u(x, t) = X(x)T(t).$$

$$a^2 X(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \text{konstant} = \lambda$$

Ett system av okopplade ODE erhålles.

$$X'(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$$

Linjära med konstanta koefficienter.

Tre olika fall :  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ .

$$\lambda > 0, \lambda = \mu^2, \mu \in R.$$

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$$

$$\text{Lösningarna ges av } X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}.$$

$$\text{ Motsvarande för "T-ekvationen" ger : } T(t) = C_1 e^{a\mu t} + D_1 e^{-a\mu t}.$$

$$\lambda = 0$$

$$X(x) = 0$$

$$X(x) = A_2 x + B_2$$

$$T(t) = C_2 t + D_2$$

$$\lambda < 0, \lambda = -\mu^2, \mu \in R.$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$T(t) = C_3 \cos a\mu t + D_3 \sin a\mu t$$

## 12.4.1.

Vi söker den lösning som uppfyller de givna randvillkoren.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Därefter anpassar vi lösningen till begynnelsevillkoren.

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} x(L - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$



Substitutionen ger att randvillkoren kan skrivas

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t)$$

$$0 = u(L,t) = X(L)T(t)$$

Dessa samband skall gälla för alla  $t$ .

Detta innebär att :  $0 = X(0)$ ,  $0 = X(L)$ .

Vi studerar de tre olika fallen.

$$\lambda > 0, \lambda = \mu^2, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Lösningarna ges av } X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}.$$

$$0 = X(0) = A_1 + B_1$$

$$0 = X(L) = A_1 e^{\mu L} + B_1 e^{-\mu L}$$

$$B_1 = -A_1$$

$$A_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0$$

Endast den triviala lösningen  $A_1 = B_1 = 0$ .

$$\lambda = 0$$

$$X(x) = A_2 x + B_2$$

$$T(t) = C_2 t + D_2$$

$$0 = X(0) = B_2$$

$$0 = X(L) = A_2 L + B_2$$

Endast den triviala lösningen  $A_2 = B_2 = 0$ .

$$\lambda < 0, \lambda = -\mu^2, \mu \in R.$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$0 = X(0) = A_3$$

$$0 = X(L) = A_3 \cos \mu L + B_3 \sin \mu L$$

$$B_3 \sin \mu L = 0$$

$B_3 = 0$  ger endast den triviala lösningen.

Däremot ger  $\sin \mu L = 0$  följande:  $\mu L = n\pi, n \in Z.$

$$X(x) = B_3 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Motsvarande för "T - lösningen":  $T(t) = C_3 \cos a \frac{n\pi}{L} t + D_3 \sin a \frac{n\pi}{L} t.$

En lösning som satisfierar differentialekvationen och de givna randvillkoren är :

$$u_n(x, t) = B_3 \sin \frac{n\pi}{L} x \left\{ C_3 \cos a \frac{n\pi}{L} t + D_3 \sin a \frac{n\pi}{L} t \right\}$$

Varje linjärkombination av lösningar är en lösning.

$$u(x, t) = \sum_{n=1} \left\{ a_n \cos a \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin a \frac{n\pi}{L} t \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Det återstår nu att bestämma konstanterna  $a_n$  och  $b_n$ .

Begynnelsevillkoren ger oss dessa.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{n=1} a \frac{n\pi}{L} \left\{ -a_n \sin a \frac{n\pi}{L} t + b_n \cos a \frac{n\pi}{L} t \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{4} x(L-x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=1} a \frac{n\pi}{L} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x = 0$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{4} x(L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx =$$

$$= \frac{2}{L} \left\{ \frac{x(L-x)}{4} \frac{-L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L - \frac{L-2x}{4} \frac{-L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{L} \left\{ 0 + \frac{L}{n\pi} \left\{ \frac{L-2x}{4} \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L - \frac{-2}{4} \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L dx \right\} \right\} =$$

$$= \frac{2}{L} \left\{ 0 + \frac{L}{n\pi} \left\{ \frac{-2}{4} \frac{L}{n\pi} \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L \right\} \right\} = \frac{L^2}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi) =$$

$$= \begin{matrix} 0 & , & n = 2m \\ \frac{2L^2}{(2m+1)^3 \pi^3} & , & n = 2m+1 \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1} \left\{ a_n \cos a \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin a \frac{n\pi}{L} t \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x,t) = \sum_{m=0} \left\{ \frac{2L^2}{(2m+1)^3 \pi^3} \cos a \frac{(2m+1)\pi}{L} t \right\} \sin \frac{(2m+1)\pi}{L} x$$