Första ordningens differentialekvationer.

2.1. Kvalitativ analys.

2.2. Separabla differentialkevationer.

2.3. Linjära differentialekvationer.

2.5. Substitutioner.

LINJEELEMENT

ISOKLINER

RIKTNINGSFÄLT

AUTONOM $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(y)}$

KRITISK PUNKT

JÄMVIKTSPUNKT

STATIONÄR PUNKT

FASPORTRÄTT

FASLINJE

ATTRAKTOR

REPELLATOR

Första ordningens ODE

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$$

SEPARABLA

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$$

LINJÄRA

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}$$

SEPARABLA

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

I.

$$h(y) = 0 \qquad y = \text{konstant}$$

II.

$$h(y) \neq 0 \qquad \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Integrera map x.

LINJÄRA

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}$$

Multiplicera med

$$\boxed{e^{\int P(x)dx}}$$

$$\boxed{e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}f(x)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = e^{\int P(x)dx}f(x)}$$

Integrera map x.

Linjär av första ordningen.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}$$

Allmänna lösningen kan skrivas: $y = y_h + y_p$.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx + P(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int P(x)dx = \ln|C_1|$$

$$y = \pm C_1 e^{-\int P(x)dx} = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Variation av parametrar.

Ansätt $y_p = u(x)y_1(x)$, där $y_1(x) = e^{-\int P(x)\,dx}$.

Insättning i [1] ger: $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} y_1 + u\frac{dy_1}{dx} + Puy_1 = f.$

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} y_1 = f, \quad \frac{du}{dx} = \frac{f}{y_1}, \quad u = \int \frac{f}{y_1}\,dx$$

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int f(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Allmänna lösningen $y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int f(x)e^{\int P(x)dx}\,dx.$

SUBSTITUTIONER

HOMOGENA

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\boxed{\text{Sätt } z = \frac{y}{x}. \quad y = xz, \quad y' = xz' + z.}$$

$$xz' + z = f(z),$$

$$xz' = f(z) - z \quad \text{vilken är separabel.}$$

BERNOULLSKA

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^{\alpha}$$

$$\alpha \neq 0,\ \ \alpha \neq 1,\ \ \alpha \qquad R$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

Sätt $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}$.

$\dfrac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = f(x)$, vilken är linjär.