Differentialekvationer av högre ordning

4.1. Inledande teori: linjära ekvationer.

4.2. Reduktion av ordning.

4.6. Variation av parametrar.

BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

RANDVÄRDESPROBLEM

DIFFERENTIALOPERATOR

LINJÄRT OBEROENDE

WRONSKIAN

FUNDAMENTALLÖSNINGAR

HOMOGENA LÖSNINGAR

ALLMÄNNA LÖSNINGAR

BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_1,\quad \ldots\ldots\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Låt $a_n(x),\ a_{n-1}(x), \ldots a_1(x),\ a_0(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga på ett intervall I och låt $a_n(x) \neq 0 \quad x \quad I$. För varje godtycklig punkt $x = x_0 \quad I$ existerar en entydig lösning $y(x)$ på intervallet I.

RANDVÄRDESPROBLEM

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$y(a)=y_0,\ \ y(b)=y_1.$$

DIFFERENTIALOPERATOR

$$\boxed{\begin{gathered}a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ \frac{d}{dx} = D \\ L(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)\end{gathered}}$$

$$\boxed{L(D)y = g(x)}$$

[IH]

$$\boxed{L\{\alpha f(x) + \beta h(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(h(x))}$$

$$\boxed{L(D)y = 0} \qquad [H]$$

Låt $y_1, \; y_2, \; \ldots\ldots, y_k$ vara lösningar

till [H] på ett intervall I. Då är linjärkombinationen

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_k y_k$ också en lösning,

där $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_k$ är godtyckliga konstanter.

LINJÄRT OBEROENDE

$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ är linjärt beroende på ett intervall I om det existerar konstanter $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$, alla ej lika med noll, så att

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots\ldots + c_n f_n(x) = 0, \qquad x \qquad I.$$

Om $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ ej är linjärt beroende på intervallet I är $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ linjärt oberoende.

WRONSKIAN

Låt funktionerna $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ vara deriverbara n - 1 gånger.

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_n \\ f_1' & f_2' & f_n' \\ & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Låt $y_1, \; y_2, \; \ldots\ldots, y_n$ vara n lösningar till [H] på ett intervall I.

Då är $\{y_1, \; y_2, \; \ldots\ldots, y_n\}$ linjärt oberoende på I

$\Leftrightarrow$ W($y_1, \; y_2, \; \ldots\ldots, y_n$) $\neq 0$, x I.

FUNDAMENTALLÖSNINGAR

Varje $\{y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots, y_n\}$ av linjärt oberoende lösningar till [H] på ett intervall I benämnes fundamentallösningar på I.

Låt $\{y_1, \ y_2, \ \ldots\ldots, \ y_n\}$ vara fundamentallösningar till [H] på ett intervall I. Då är allmänna lösningen till [H] på I :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n,$$

där $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

Låt y_p vara en godtycklig partikulärlösning till [IH] på ett intervall I och låt $\{y_1, \ y_2, \ \ldots\ldots, y_n\}$ vara fundamentallösningar till [H] på I.

Då ges allmänna lösningen till [IH] av :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n + y_p,$$

där $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

REDUKTION AV ORDNING

$$\boxed{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0}$$

$$\boxed{a_2(x) \neq 0}$$

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \qquad [1]$$

$$\boxed{P(x) \text{ och } Q(x) \text{ är kontinuerliga på intervallet I}}$$

y_1 är en känd icke - trivial lösning till [1].

En andra lösning till [1], y_2, sökes.

Villkor: y_1 och y_2 skall vara linjärt oberoende på I.

$\dfrac{y_2}{y_1}$ är icke - konstant på I. Sätt $y(x) = u(x)y_1(x)$.

Insättning i [1] ger :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y =$$

$$\{u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x)\} +$$

$$P(x)\{u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)\} + Q(x)u(x)y_1(x) =$$

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)\{2y_1'(x) + P(x)y_1(x)\} +$$

$$u(x)\{y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)\} =$$

$$\boxed{u''(x)y_1(x)+u'(x)\{2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\}=0}$$

$$\boxed{\text{Sänk ordningen: } \mathrm{w}(\mathrm{x})=u'(x),\ \ w'(x)=u''(x).}$$

$$\boxed{w'(x)y_1(x)+w(x)\{2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\}=0}$$

Linjär av första ordningen.

$$w'(x)+w(x)\{2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}+P(x)\}=0$$

En integrerande faktor är: $\mathrm{e}^{2\ln|y_1(x)|+\int P(x)dx}=y_1{}^2(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx}$.

$$\frac{d}{dx}\{w(x)y_1{}^2(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx}\} = 0$$

$$w(x)y_1{}^2(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx} = C_1$$

$$w(x) = C_1 y_1{}^{-2}(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)dx} = u'(x)$$

$$u(x) = \int C_1 y_1{}^{-2}(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)dx} dx + C_2$$

$$y(x) = y_1(x)\{\int C_1 y_1{}^{-2}(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)dx} dx + C_2\} =$$

$$C_1 y_1(x)\int y_1{}^{-2}(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)dx} dx + C_2 y_1(x)$$

$$W(y_1, y_1 u) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 u \\ y_1' & y_1' u + y_1 u' \end{vmatrix} = y_1^{\,2} u' = \mathrm{e}^{-\int P(x)dx} \neq 0$$

y_1 och $y_2 = y_1 u$ är linjärt oberoende och bildar en bas för lösningsrummet till [1].

VARIATION AV PARAMETRAR

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)} \qquad [1]$$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Ansätt: $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$.

Insättning i [1] ger:

$$y_1''u_1 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$

$$y_2''u_2 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' +$$

$$P\{y_1'u_1 + y_1u_1' + y_2'u_2 + y_2\, u_2'\} +$$

$$Q\{y_1u_1 + y_2u_2\} = f$$

$$u_1\{y_1'' + Py_1' + Qy_1\} + u_2\{y_2'' + Py_2' + Qy_2\} +$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$P\{y_1u_1' + y_2u_2'\} = f$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + \frac{d}{dx}\{y_1u_1' + y_2u_2'\} + P\{y_1u_1' + y_2u_2'\} = f$$

En partikulärlösning sökes.

Välj : $y_1u_1' + y_2u_2' = 0.$

Då erhålles : $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f.$

Systemet kan skrivas:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Allmänna lösningen ges av

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \;+ y_1(x) u_1(x) + y_2(x)\, u_2(x)$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.