

Laplaceformen

7.1. Definition av Laplaceformen.

7.2. Inversa transformen och transformen av derivator.

7.3. Translationsteorem.

7.4. Operationella egenskaper.

7.5. Diracs deltafunktion

7.6. Linjära ekvationssystem.

INTEGRALTRANSFORMER

$$\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

$K(s,t)$ kallas transformens kärna.

$a = 0$, $b = \infty$, $K(s,t) = e^{-st}$ ger Laplacetransformen.

$a = -\infty$, $b = \infty$, $K(s,t) = e^{-ist}$ ger Fouriertransformen.

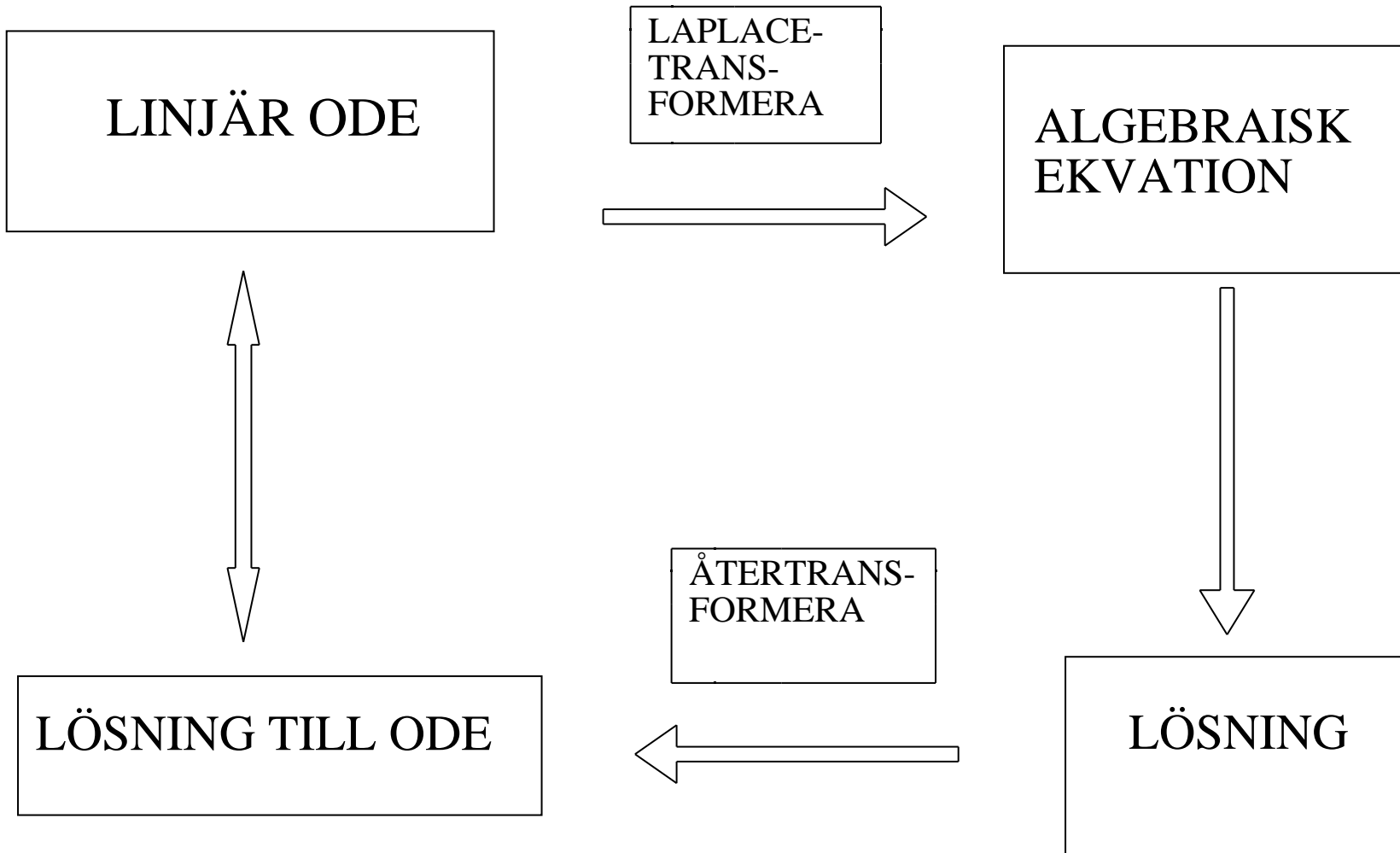
LAPLACETRANSFORM

HEAVISIDES TRAPPSTEGSFUNKTION

ENHETSSTEGFUNKTION

FALTNING

DIRACS DELTAFUNKTION



$$D\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$$

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha f(x)dx + \beta g(x)dx$$

b

b

b

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha f(x)dx + \beta g(x)dx$$

a

a

a

Laplace transformationen av f : $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$

Då integralen konvergerar.

En funktion är av exponentiell ordningen c om det finns en konstant c , $M > 0$, och $T > 0$ så att $|f(t)| \leq Me^{ct}$ för alla $t > T$.

Om $f(t)$ är styckvis kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$
och av exponentiell ordning c för $t > T$,
då existerar $L\{f(t)\}$ för $s > c$.

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\int_0^T e^{-st} f(t) dt \text{ existerar.}$$

$$\left| \int_T e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_T |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T e^{-st} e^{ct} dt =$$

$$= M \left[\frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)} \right]_T = M \frac{e^{-(s-c)T}}{(s-c)}$$

Om $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ är kontinuerliga på intervallet $[0, \infty)$ och av exponentiell ordning och om $f^{(n)}(t)$ är styckvis kontinuerlig på $[0, \infty)$, då gäller

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

där $F(s) = L\{f(t)\}$.

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt =$$

$$= \left[e^{-st} f(t) \right]_0 - \int_0^{\infty} (-s) e^{-st} f(t) dt =$$

$$= -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt =$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

$$= s(sL\{f(t)\} - f(0)) - f(0) =$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - f(0)$$

Om $f(t)$ är styckvis kontinuerlig på $[0, \infty)$ och av exponentiell ordning för $t > T$,
då är $\lim_{s \rightarrow \infty} L\{f(t)\} = 0$.

$$|f(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$|f(t)| \leq M_2 e^{\gamma t}, \quad t > T$$

$$M = \max\{M_1, M_2\}, \quad c = \max\{0, \gamma\}$$

$$|L\{f(t)\}| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt$$

$$M \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ct} dt = M \left[\frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)} \right]_0^{\infty} = \frac{M}{(s-c)}, \quad s > c$$

$$|L\{f(t)\}| < \infty, \quad s > c \quad \Rightarrow \quad L\{f(t)\} < \infty, \quad s > c$$

Om $F(s) = L\{f(t)\}$ och a är ett godtyckligt reellt tal, då är $L\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$.

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt =$$

$$= \left\{ s_1 = s - a \right\} = \int_0^{\infty} e^{-s_1 t} f(t) dt = F(s_1) = F(s - a)$$

Funktionen $U(t - a)$ definieras av

$$U(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{då } t < a \\ 1 & \text{då } t \geq a \end{cases}$$

Om $F(s) = L\{f(t)\}$ och $a > 0$,

då är $L\{f(t - a)U(t - a)\} = e^{-as}F(s)$.

$$L\{ f(t - a)U(t - a) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t - a)U(t - a) dt =$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t - a) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(a+v)} f(v) dv = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v) dv = e^{-as} F(s).$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(a+v)} f(v) dv = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v) dv = e^{-as} F(s).$$

Om $F(s) = L\{f(t)\}$ och $n = 1, 2, 3, \dots$,

då gäller $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt = \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt = -L\{t f(t)\} \end{aligned}$$

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$L\{t^2f(t)\} = -\frac{d}{ds}\{L\{tf(t)\}\} =$$

$$= -\frac{d}{ds}\left\{-\frac{d}{ds}F(s)\right\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

Låt funktionerna f och g vara styckvis kontinuerliga på intervallet $[0, \infty)$, då ges faltningen $f * g$, av f och g av integralen

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

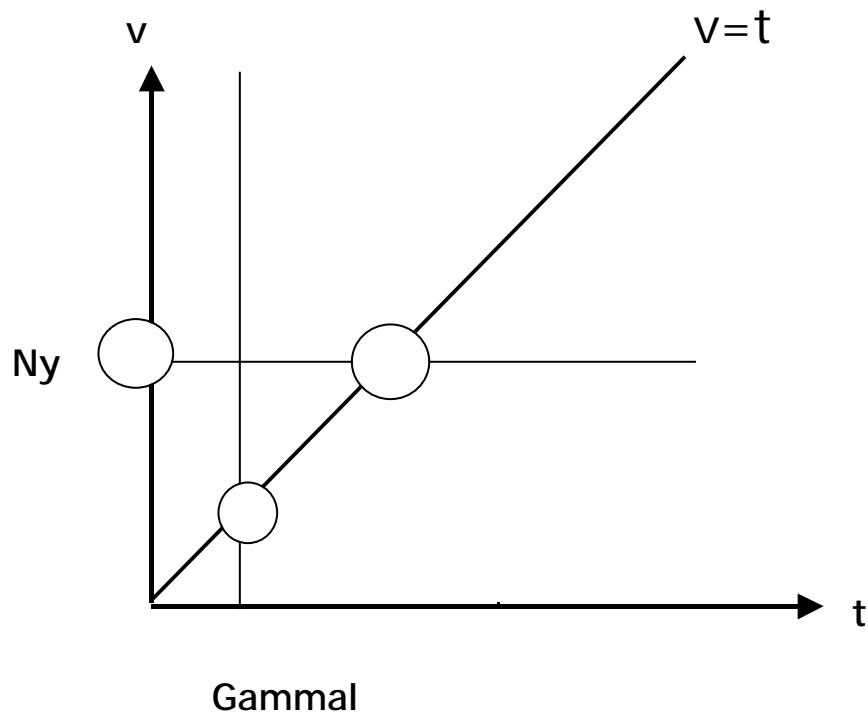
Om $f(t)$ och $g(t)$ är styckvis kontinuerliga på $[0, \infty)$ och av exponentiell ordning, då $L\{f * g\} = L\{f(t)\}L\{g(t)\} = F(s)G(s)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du$$

$$F(s)G(s) = \left\{ \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right\} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du \right\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) e^{-st} f(t) dt du = \int_0^{\infty} f(t) \left\{ \int_0^{\infty} g(u) e^{-s(t+u)} du \right\} dt =$$



$$\{v = t + u, dv = du\}$$

$$\{v : t- > \quad, t : 0- > \quad\}$$

$$\{t : 0- > v, v : 0- > \quad\}$$

$$= \int_0^t f(t) \{ g(v-t) e^{-sv} dv \} dt =$$

$$= \int_0^v e^{-sv} \{ \int_0^v f(t) g(v-t) dt \} dv =$$

$$= \int_0^v e^{-sv} f * g(v) dv = L\{f * g\}$$

Om $f(t)$ är styckvis kontinuerlig på $[0, \infty)$,
av exponentiell ordning och periodisk med perioden T ,

$$\text{då } L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-s(u+T)} f(u+T) du = \\
 & = e^{-sT} \int_0^T e^{-su} f(u) du = e^{-sT} L\{f(t)\}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} L\{f(t)\}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Transform av Diracs deltafunktion

$$\text{För } t_0 > 0 \quad L\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$$

$$f_a(t) = \frac{1}{2a} \{U(t - (t_0 - a)) - U(t - (t_0 + a))\}$$

$$L\{f_a(t)\} = \frac{1}{2a} [L\{U(t - (t_0 - a))\} - L\{U(t - (t_0 + a))\}] =$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{s} e^{-(t_0 - a)s} - \frac{1}{s} e^{-(t_0 + a)s} \right] = \frac{e^{-t_0 s}}{2as} (e^{as} - e^{-as})$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} L\{f_a(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-t_0 s}}{2as} (e^{as} - e^{-as}) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-t_0 s}}{2as} (1 + as - (1 - as) + O(a^2)) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-t_0 s}}{2as} (2as + O(a^2)) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} e^{-t_0 s} (1 + O(a)) = e^{-t_0 s}$$