System av linjära första ordningens ODE.

8.1. Inledande teori.

8.2. Homogena linjära system med konstanta koefficienter.

8.3. Variation av parametrar.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots\dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}}$$

BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \ , \ \ t_0 \quad I$$

Låt elementen i matriserna $\mathbf{A}(t)$ och $\mathbf{F}(t)$

vara kontinuerliga på ett gemensamt intervall I.

Då har begynnelsevärdesproblemet entydig lösning på I.

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{W}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Fundamentallösningar: $\mathbf{X}_1, \ \mathbf{X}_2, \ldots, \ \mathbf{X}_n$.

Allmän lösning: $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ \ldots + c_n\mathbf{X}_n$.

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}_1 \ \ \mathbf{X}_2 \ \ \ldots \ \ \mathbf{X}_n\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi\mathbf{C}$$

Φ kallas fundamentalmatris.

HOMOGENA LINJÄRA SYSTEM

MED KONSTANTA KOEFFICIENTER

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K} e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = A\mathbf{K} e^{\lambda t}$$

$$(A - \lambda I)K = 0$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden

Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

För få linjärt oberoende egenvektorer

Komplexa egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\boxed{\mathbf{X} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}}$$

Upprepade reella egenvärden

Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

$$\boxed{\mathbf{X} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_1 t}}$$

För få linjärt oberoende egenvektorer

λ_1 egenvärde med multiplicitet 2.

Ena lösningen $\mathbf{X}_1 = Ke^{\lambda_1 t}$.

Andra lösningen $\mathbf{X}_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$

$$\boldsymbol{Kte^{\lambda_1 t}}\lambda_1 + \boldsymbol{Ke^{\lambda_1 t}} + \boldsymbol{Pe^{\lambda_1 t}}\lambda_1 = \boldsymbol{AKte^{\lambda_1 t}} + \boldsymbol{APe^{\lambda_1 t}}$$

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{Kt} + (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{K} = 0$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}$$

Komplexa egenvärden $\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad , \alpha \quad R, \ \beta \quad R.$

Komplexa egenvektorer $\mathbf{K} = \mathbf{K_1} + i\mathbf{K}_2$

$$Z = Z_{\mathbf{1}} + iZ_2$$

$$Z = Ke^{\lambda_1 t} = (\mathbf{K_1} + i\mathbf{K}_2)e^{(\alpha + i\beta)t}$$

$$Z = e^{\alpha t}(\mathbf{K_1} + i\mathbf{K}_2)(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$\mathbf{X_1} = \operatorname{Re} Z = e^{\alpha t}(\mathbf{K_1}\cos\beta t - \mathbf{K}_2\sin\beta t)$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im} Z = e^{\alpha t}(\mathbf{K_1}\sin\beta t + \mathbf{K}_2\cos\beta t)$$

Variation av parametrar

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$$

$$\Phi'(t)\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t)$$

$$(\Phi'(t) - \mathbf{A}\Phi(t))\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t)$$

$$\Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t) \ , \ \mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$$

$$X = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$$