KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200 och Diff & Trans I för LV, 5B1220.
Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

DEL1:

1. Betrakta differentialekvationen $y' = y(y-1)(y-3)$, där $y = y(t)$ och t anger tiden.
Analysera vad som händer efter lång tid. Studera speciellt startvärdena $y(0) = 3$ respektive $y(0) = 2$.
Lösning:
Vi bestämmer först de stationära lösningarna och finner att dessa är $y = 0,\ 1$ respektive 3.
En teckenstudie hos förstaderivatan genomföres och följande utfall erhålles:

$y' > 0$, $y > 3$ $\Rightarrow y$ växande , $y > 3$

$y' < 0$, $1 < y < 3$ $\Rightarrow y$ avtagande , $1 < y < 3$

$y' > 0$, $0 < y < 1$ $\Rightarrow y$ växande , $0 < y < 1$

$y' < 0$, $y < 0$ $\Rightarrow y$ avtagande , $y < 0$

För $y(0) = 3$ förblir lösningen kvar på den stationära lösningen.
För $y(0) = 2$ innebär det att startvärdet ligger i ett intervall där lösningen är avtagande och nedåt begränsad av $y = 1$.
SVAR: För startvärdet $y(0) = 3$ förändras ej funktionsvärdet ty detta är en stationär lösning.
För startvärdet $y(0) = 2$ kommer funktionsvärdet att gå mot ett efter lång tid.

2. En full tank innehåller 300 liter vatten i vilket 50 gram salt är löst.
En annan saltlösning med koncentrationen 2 gram per liter pumpas in med en hastighet av 3 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Ställ även upp motsvarande differentialekvation då utpumpningshastigheten är 2 liter per minut.
Bestäm saltmängden vid tiden t för det fall då tanken ej sprängs.
Lösning:
Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t.
Förändringen av saltmängden per tidsenhet blir: $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 3$.
Vid den lägre pumphastigheten erhålles istället differentialekvationen: $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 2$.
För att tanken ej skall sprängas måste inpumpningshastigheten och utpumpningshastigheten vara lika.
Vi löser således den första differentialekvationen.
Denna är linjär av första ordningen och en allmän lösning kan erhållas som alllmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.

Den allmänna homogena lösningen ges av $S_h(t) = Ae^{-\frac{t}{100}}$ och en partikulärlösning är $S_p(t) = 600$.

Den allmänna lösningen är således $S(t) = S_h(t) + S_p(t) = Ae^{-\frac{t}{100}} + 600$.
Vid tiden noll är saltmängden lika med 50 gram. Det ger att konstanten är lika med -550.

Den sökta lösningen är $S(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$.

SVAR: Den första differentialekvationen blir $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 3$.
Den andra differentialekvationen blir $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 2$.

Den sökta lösningen är $S(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$.

3. Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = 0$, $x > 0$
samt en partikulärlösning till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = e^x$, $x > 0$.
Lösning:
Den givna differentialekvationen är linjär. En strategi är att bestämma en lösning till den homogena differentialekvationen och därefter reducera ordningen. Den homogen differentialekvationen kan omformas till följande differentialekvation: $y'' - 2y' + y = 0$.

En lösning till denna ges av $y_1 = e^x$ .Sätt nu $y = e^x z(x)$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger oss följande differentialekvation:

$e^x x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$, vilken förenklad blir $z'' = \frac{1}{x}$.

Integration ger oss $z' = \ln x + C_1$. Upprepad integration ger: $z = x\ln x - x + C_1 x + C_2$.
Allmänna lösningen till dufferentialekvationen är

$$y = e^x z = e^x(x\ln x - x + C_1 x + C_2) = C_1 x e^x + C_2 e^x + e^x(x\ln x - x).$$

En partikulärlösning är $y_p = e^x(x\ln x - x)$.
En fundamentalmängd av lösningar består av två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen.
I vårt fall har vi $\{xe^x, e^x\}$, ty dessa är linjärt oberoende.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{xe^x, e^x\}$. En partikulärlösning är $y_p = e^x(x\ln x - x)$.

4. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3,\ \ 1 \le t \le 2$ och noll för övrigt.
Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.
Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = F(s)$.

Insättning av begynnelsevillkoren ger $Y(s) = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{F(s)}{s^2+9}$.

För bestämning av högerledets Laplacetransform använder vi dess definition.(Heaviside går också bra.)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_1^2 3e^{-st}\,dt = \frac{3(e^{-s} - e^{-2s})}{s}.$$

Den sökta lösningens Laplacetransform är $Y(s) = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{3(e^{-s} - e^{-2s})}{s(s^2+9)} = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{1}{3}(e^{-s} - e^{-2s})(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9})$.

Återtransformering ger oss vår sökta lösning:

$$y(t) = \cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}U(t-1)(1 - \cos 3(t-1)) - \frac{1}{3}U(t-2)(1 - \cos 3(t-2)).$$

Här är $U(t-a)$ Heavisidefunktionen.
SVAR: Den sökta lösningen är

$$y(t) = \cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}U(t-1)(1 - \cos 3(t-1)) - \frac{1}{3}U(t-2)(1 - \cos 3(t-2)).$$

5. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi skriver det givna systemet på formen: $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Egenvärden och egenvektorer till matrisen bestämmes.

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dess egenvärden erhålles ur ekvatioen

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4).\ \lambda_1 = -1 \text{ och } \lambda_2 = 4.$$

Motsvarande egenvektorer erhålles ur systemet: $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = -1$ ger: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 4$ ger: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ och

$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$. Vi får $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

6. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Låt matrisen $\mathbf{A}$ vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2.
Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)
a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.
b $\lambda_{1,2} = -1 \pm 9i$.
c) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$.

Lösning:
a) I detta fall är egenvärden reella och med olika tecken. Således är det en sadelpunkt och därmed instabil.
b) Komplexa egenvärden med realdelen skild ifrån noll.
Detta är en spiral och negativ realdel medför att spiralen är stabil.
c) Reella och skilda egenvärden ger en nod och negativa egenvärden medför stabilitet.
SVAR: a) Sadelpunkt, instabil.
b) Stabil spiral.
c) Stabil nod.

7. Bestäm den funktion, $u(x,t)$, som uppfyller differentialekvationen $u_t = u_x$ och villkoret $u(x,0) = 7e^x + 5e^{3x}$.
Lösning:
Vi använder variabelseparationsmetoden, dvs vi sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ och sätter in detta i den givna partiella differentialekvationen. Vi får då: $X(x)T'(t) = X'(x)T(t)$, dividera med $X(x)T(t)$. Då erhålles $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X'(x)}{X(x)}$.
Denna kvot är konstant, ty vänstra ledet beror endast av t och högra ledet beror endast av x. Kalla konstanten för λ.
Vi får då ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X'(x) = \lambda X(x) \end{cases}$.

Detta system har den allmänna lösningen $\begin{cases} T(t) = Ae^{\lambda t} \\ X(x) = Be^{\lambda x} \end{cases}$ vilket ger $u(x,t) = Be^{\lambda x}Ae^{\lambda t} = Ce^{\lambda(x+t)}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösning till differentialekvationen. Vi skall bestämma den lösning som uppfyller villkoret $u(x,0) = 7e^x + 5e^{3x}$. Den sökta lösningen är $u(x,t) = 7e^{(x+t)} + 5e^{3(x+t)}$.
SVAR: Den sökta funktionen är $u(x,t) = 7e^{(x+t)} + 5e^{3(x+t)}$.

8. Låt $\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$ vara lösningar till systemet av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$.
Lösning:

Vi får följande två ekvationer: $\mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2$. Med de givna funktioner insatta blir detta $\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ +e^{-t} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

och $\begin{pmatrix} 12e^{4t} \\ -8e^{4t} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ -2e^{4t} \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 12e^{4t} & -e^{-t} \\ -8e^{4t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-t} \\ -2e^{4t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$.

Multiplicera den sista ekvationen med inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-t} \\ -2e^{4t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$ och detta från höger.

Inversen ges av $\dfrac{1}{-5e^{3t}}\begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^{4t} & 3e^{4t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{-4t} \\ -2e^{t} & -3e^{t} \end{pmatrix}$.

Den konstanta matrisen är $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12e^{4t} & -e^{-t} \\ -8e^{4t} & e^{-t} \end{pmatrix}\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{-4t} \\ -2e^{t} & -3e^{t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

SVAR: Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

DEL2:

11. .a) Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' + 4y - x + 3 = 0$, $y(x_0) = 0$.
Bestäm ett värde på x_0 för vilket grafen till lösningen till begynnelsevärdesproblemet tangerar x-axeln i punkten $(x_0, 0)$.
b) Låt $y = y_1(x)$ vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$.
Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$ giltig där $y \neq 0$.
c) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + P(x)y = 4x$, $y(0) = 3$,

där $P(x) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$

Lösning:
a) Lösningskurvan tangerar x-axeln i punkten $(x_0, 0)$ då derivatan är noll där.
Insättning i differentialekvationen ger: $0 + 0 - x_0 + 3 = 0$, $x_0 = 3$.
b) Vi ansätter $y = y_1(x)z(x)$ och sätter in i den inhomogena differentialekvationen.
Vi får $y_1'(x)z(x) + y_1(x)z'(x) + P(x)y_1(x)z(x) = f(x)$, $y_1(x)z'(x) + (y_1'(x) + P(x)y_1(x))z(x) = f(x)$.
$y = y_1(x)$ är en lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$ vilket leder till att $y_1(x)z'(x) = f(x)$.
Vi får $z'(x) = \dfrac{f(x)}{y_1(x)}$. Integrera med avseende på x : $z(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx + A$.

Den allmänna lösningen ges av $y = y_1(x)z(x) = y_1(x)(\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx + A) = Ay_1(x) + y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$.

En partikulärlösning ges av $y_p = y_1(x)\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$.

c) Differentialekvationen är linjär av första ordningen och den löses med hjälp av integrerande faktor.

Vi skriver först om differentialekvationen: $\begin{cases} y' + 2y = 4x \ , & 0 \le x \le 1 \\ y' - \dfrac{2}{x}y = 4x \ , & x > 1 \end{cases}$.

Hela ekvationen multipliceras med integrerande faktor, vilken ges av $\begin{cases} e^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} \ , & x > 1 \end{cases}$.

Vi får $\begin{cases} y'e^{2x}+2e^{2x}y=4xe^{2x} &, \ 0\le x\le 1 \\ y'\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\frac{1}{x^2}y=4x\frac{1}{x^2} &, \ x>1 \end{cases}$ eller $\begin{cases} (ye^{2x})'=4xe^{2x} &, \ 0\le x\le 1 \\ (y\frac{1}{x^2})'=4\frac{1}{x} &, \ x>1 \end{cases}$.

Integrera med avseende på x : $\begin{cases} ye^{2x}=2xe^{2x}-e^{2x}+C_1 &, \ 0\le x\le 1 \\ y\frac{1}{x^2}=4\ln x+C_2 &, \ x>1 \end{cases}$.

Villkoret $y(0)=3$ ger tillsammans med ekvationen $ye^{2x}=2xe^{2x}-e^{2x}+C_1$ att $C_1=4$.

Insättning ger: $\begin{cases} y=2x-1+4e^{2x} &, \ 0\le x\le 1 \\ y\frac{1}{x^2}=4\ln x+C_2 &, \ x>1 \end{cases}$. Det återstår att bestämma konstanten C_2.

Kontinuerlig lösning söktes och kontinuitetsvillkoret ger: $2x-1+4e^{2x}|_{x=1}=x^2(4\ln x+C_2)|_{x=1}$.

Konstanten blir $C_2=1+4e^2$ och den sökta lösningen blir $\begin{cases} y=2x-1+4e^{2x} &, \ 0\le x\le 1 \\ y=x^2(4\ln x+1+4e^2) &, \ x>1 \end{cases}$

SVAR: a) $x_0=3$

b) Se ovan.

c) Den sökta lösningen är $\begin{cases} y=2x-1+4e^{2x} &, \ 0\le x\le 1 \\ y=x^2(4\ln x+1+4e^2) &, \ x>1 \end{cases}$.

12.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a,b]$.

Låt vidare $y=f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$.

Bestäm f :s utveckling i den ortogonala funktionsföljden.

b) Utveckla $f(x)=\begin{cases} 0 &, \ -\pi<x<0 \\ \pi-x &, \ 0\le x\le\pi \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1,\ \cos nx,\ \sin mx\}$, $n=1,2,3,..,\ m=1,2,3,\ldots$.

c) Bestäm seriens värde för $x=0$.

Lösning:

a) Låt den givna följden av ortogonala funktioner ges av $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Skriv $f(x)$ som en linjärkombination av de ortogonala funktionerna.

$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots.$

Multiplicera ekvationen med $\varphi_m(x)$ och integrera över intervallet $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx=c_1\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_m(x)dx+c_2\int_a^b\varphi_2(x)\varphi_m(x)dx+\ldots+c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx+\ldots$$

Eftersom den givna funktionsföljden är ortogonal blir varje integral på höger sida lika med noll utom då $n\neq m$.

Ekvationen blir då $\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx=c_m\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_m(x)dx$, dvs $c_m=\dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}$.

Den sökta utvecklingen blir $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}\varphi_m(x)$.

b) Vi bestämmer koefficienterna i utvecklingen $f(x) = c_1 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx$.

$$c_1 = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_1(x)dx}{\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1(x)dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)1dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)dx}{2\pi} = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\cos nx dx}{\int_a^b \cos nx \cos nx dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx}{\pi}$$

$$a_n = \frac{\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin nx}{n}dx}{\pi} = \frac{\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi n^2}$$

$$b_m = \frac{\int_a^b f(x)\sin mx dx}{\int_a^b \sin mx \sin mx dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin mx dx}{\pi}$$

$$b_m = \frac{\left[(\pi - x)\frac{-\cos mx}{m}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{-\cos mx}{m}dx}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{m} - \left[-\frac{\sin mx}{m^2}\right]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{1}{m}$$

Den sökta utvecklingen är: $f(x) = \frac{\pi}{4}1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi}\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mx$.

c) Seriens värde för $x = 0$ erhålles som medelvärdet av funktion i detta språng.
Vi får att värdet är $\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$.

SVAR: a) $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}\varphi_m(x)$ b) $f(x) = \frac{\pi}{4}1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi}\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mx$ c) $\frac{\pi}{2}$.

13. Härled utgående från definitionen Laplacetransformationen för funktionen $f_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h}, & a \le t \le a+h \\ 0, & t < a, \ t > a+h \end{cases}$.

Benämn denna transformation $L\{f_h(t)\}$. Låt $h \to 0$, dvs bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{h \to 0} L\{f_h(t)\}$.

Lös slutligen begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 8y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, då $f(t) = \lim\limits_{h \to 0} f_h(t)$.

Omkastning av gränsövergång och integration förutsättes tillåten.

Lösning:
Insättning i Laplacetransformationens definition ger:

$$L\{f_h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_h(t)\,dt = \int_a^{a+h} e^{-st}\frac{2}{h}\,dt = \left[e^{-st}\frac{2}{-sh}\right]_a^{a+h} = \frac{2}{sh}\left(e^{-sa} - e^{-s(a+h)}\right) = \frac{2e^{-sa}}{sh}(1 - e^{-sh})$$

.

Nu över till gränsövergången och här använder vi MacLaurinutveckling av exponentialfunktionen.

$$\lim_{h \to 0} L\{f_h(t)\} = \lim_{h \to 0} \frac{2e^{-sa}}{sh}(1 - e^{-sh}) = \lim_{h \to 0} \frac{2e^{-sa}}{sh}(1 - (1 + (-sh) + h^2 H(h))) = \lim_{h \to 0} 2e^{-sa}(1 + hH(h))$$

.

Laplacetransformera differentialekvationen:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 8Y(s) = 2e^{-sa}$$

Insättning av begynnelsevillkoren ger:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 8} + \frac{2}{s^2 + 4s + 8}e^{-sa}$$

Kvadratkomplettera nämnaren.

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)^2 + 4} + \frac{2}{(s+2)^2 + 4}e^{-sa}$$

Återtransformera:

$$y(t) = e^{-2t}\sin 2t + U(t-a)e^{-2(t-a)}\sin 2(t-a)$$

SVAR: $L\{f_h(t)\} = \dfrac{2e^{-sa}}{sh}(1 - e^{-sh})$, $\lim\limits_{h \to 0} L\{f_h(t)\} = 2e^{-sa}$,

$y(t) = e^{-2t}\sin 2t + U(t-a)e^{-2(t-a)}\sin 2(t-a)$.

14. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$
Lösning:
a) En fundamentalmatris består av linjärt oberoende kolonner, vilka är lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Antalet kolonner är lika med ordningen hos den kvadratiska matrisen $\mathbf{A}$.
b) Den givna fundamentalmatrisen Φ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, dvs $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.
Härur kan den konstanta matrisen $\mathbf{A}$. Multiplicera $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$ från höger med inversen till fundamentalmatrisen Φ.
Då erhålles $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$, där Φ^{-1} är invers till fundamentalmatrisen Φ.
c) För att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$ använder vi varaition av parametrar och ansätter en partikulärlösning på formen $\mathbf{X}_p = \Phi\mathbf{U}(t)$.
Insättning i det inhomogena systemet ger: $(\Phi\mathbf{U}(t))' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$
Derivera: $\Phi'\mathbf{U}(t) + \Phi\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}$.
Omforma: $(\Phi' - \mathbf{A}\Phi)\mathbf{U}(t) + \Phi\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$.
Fundamentalmatrisens kolonner är lösningar till det homogena systemet vilket innebär att $\Phi' - \mathbf{A}\Phi = \mathbf{0}$.
Vi får då $\Phi\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}$. Multiplicera från vänster med fundamentalmatrisens invers Φ^{-1}.
Det ger $\mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}\mathbf{F}$. Integrera med avseende på t: $\mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$.

Vår sökta partikulärlösning är $\mathbf{X}_p = \Phi \int \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{F}(t)\,dt$.

SVAR: a) Se ovan, b) $\mathbf{A} = PDP^{-1}$, c) $\mathbf{X}_p = \Phi \int \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{F}(t)\,dt$.