Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200 och Diff & Trans I för LV, 5B1220.
Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 8 trepoängsuppgifter. För godkänt krävs minst 16 poäng.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelningen på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del2.

DEL1:

1. Betrakta differentialekvationen $y' = y(y-1)(y-3)$, där $y = y(t)$ och t anger tiden.
Analysera vad som händer efter lång tid. Studera speciellt startvärdena $y(0) = 3$ respektive $y(0) = 2$.

2. En full tank innehåller 300 liter vatten i vilket 50 gram salt är löst.
En annan saltlösning med koncentrationen 2 gram per liter pumpas in med en hastighet av 3 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Ställ även upp motsvarande differentialekvation då utpumpningshastigheten är 2 liter per minut.
Bestäm saltmängden vid tiden t för det fall då tanken ej sprängs.

3. Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = 0$, $x > 0$
samt en partikulärlösning till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = e^x$, $x > 0$.

4. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3$, $1 \le t \le 2$ och noll för övrigt.
Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.

5. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}$.

6. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Låt matrisen $\mathbf{A}$ vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2.
Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)
a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.
b $\lambda_{1,2} = -1 \pm 9i$.
c) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$.

7. Bestäm den funktion, $u(x,t)$, som uppfyller differentialekvationen $u'_t = u'_x$ och villkoret $u(x,0) = 7e^x + 5e^{3x}$.

8. Låt $\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$ vara lösningar till systemet av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter
$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$.

DEL2:

11.a) Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y' + 4y - x + 3 = 0$, $y(x_0) = 0$.
Bestäm ett värde på x_0 för vilket grafen till lösningen till begynnelsevärdesproblemet tangerar x-axeln i punkten $(x_0, 0)$.

b) Låt $y = y_1(x)$ vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$.
Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$ giltig där $y \neq 0$.

c) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + P(x)y = 4x$, $y(0) = 3$,

där $P(x) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$

12.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a,b]$.
Låt vidare $y = f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$.
Bestäm f :s utveckling i den ortogonala funktionsföljden.

b) Utveckla $f(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\pi < x < 0 \\ \pi - x \ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1, \ \cos nx, \ \sin mx\}$, $n = 1,2,3,..,$ $m = 1,2,3,...$.

c) Bestäm seriens värde för $x = 0$.

13. Härled utgående från definitionen Laplacetransformationen för funktionen $f_h(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \ , & a \le t \le a+h \\ 0 \ , & t < a \ , \ t > a+h \end{cases}$.

Benämn denna transformation $L\{f_h(t)\}$. Låt $h \to 0$, dvs bestäm gränsvärdet $\lim_{h \to 0} L\{f_h(t)\}$.

Lös slutligen begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 8y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, då $f(t) = \lim_{h \to 0} f_h(t)$.

Omkastning av gränsövergång och integration förutsättes tillåten.

14. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$