Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201, Komplex analys för F och T, 02–08–14, klockan 14:00–19:00.

Tal 1. C-R ekvationer $u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$ ger:

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx} + u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy}$$

$$= \Delta uv + u\Delta v + 2u_xv_x + 2u_yv_y = \Delta uv + u\Delta v + 2v_yv_x - 2v_xv_y = \Delta uv + u\Delta v.$$

Men $\Delta u = \Delta v = 0$ pga f är analytisk. Därför

$$\Delta g = 0.$$

Tal 2.

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)(z-1)} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z+1}\Big)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{1-z} - \frac{2}{2z}\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}\Big) = \frac{1}{3}\Big(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2z)^n}\Big)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

där

$$c_n = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & n = 0, 1, \dots, \\ \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{3} & n = -1, -2, \dots. \end{cases}$$

Tal 3. Låt $z = e^{it}$, $dt = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} |f(rz)|^2 \frac{dz}{z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n\overline{c_m} r^{n+m} \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} z^{n-m-1}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Tal 4. Introducera substitutionen $z = e^{it}$, $dt = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$. Då

$$e^{2it} = z^2 \quad \text{och} \quad e^{-2it} = z^{-2}$$

som ger oss att

$$\cos t = \frac{1}{2}\Big(z + z^{-1}\Big) \quad \text{och} \quad \cos 2t = \frac{1}{2}\Big(z^2 + z^{-2}\Big).$$

Därför

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{(5 - 3\cos t)} dt = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(10z - 3z^2 - 3)}\, dz$$

$$= \frac{i}{3}\int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(z-3)(z-1/3)}\, dz$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\Big\{\mathrm{Res}\Big[\frac{z^4+1}{z^2(z-3)(z-1/3)}, 0\Big] + \mathrm{Res}\Big[\frac{z^4+1}{z^2(z-3)(z-1/3)}, 1/3\Big]\Big\}$$

$$= -\frac{20\pi}{9} + \frac{41\pi}{18} = \frac{\pi}{18}.$$

Tal 5. Låt $h(z) = 100z^n$ och $g(z) = \cos \pi z$. Om $|z| = 1$ då

$$|h(z)| = 100$$

och

$$|g(z)| = |\cos \pi z| \le \frac{1}{2}\Big(|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|\Big) \le e^{\pi} < 100.$$

Rouches sats ger då att $f(z)$ har lika många nollställen som $h(z)$ innanför $\{z : |z| = 1\}$, dvs n nollställen.

Tal 6.

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\, dx.$$

Vi integrerar funktionen

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} = \frac{z^2}{(z-ia)^3(z+ia)^3}$$

runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{z = x+iy : x^2+y^2 = R,\ y > 0\}$, $I_R = \{z = x+iy : y = 0,\ -R \le x \le R\}$, $R > a$. Funktionen f har en

pol av ordning tre i punkten $z = ia$ som ligger innanför Γ_R. Residusatsen ger att

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[f(z), ia\Big] =$$

$$2\pi i\,\frac{1}{2}\lim_{z\to ia}\frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{z^2}{(z+ia)^3}\Big) = \frac{\pi}{8a^3}$$

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\,dz\Big| \le \max_{z\in C_R}|f(z)|\,\pi\,R \le \frac{R^2}{(R^2+a^2)^3}\,\pi\,R \to 0, \quad \text{då} \quad R\to\infty.$$

Därför

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz\Big) = \frac{\pi}{16a^3}.$$

Svar: $I = \frac{\pi}{16a^3}$.

Tal 7. Vi har $f = u + iv$ som är en helfunktion. Då gäller att $g(z) = e^{if(z)}$ också är en hel funktion. Nu är $|g(z)| = |e^{iu-v}| = e^{-v} \le e^{-M}$. Liouvilles sats ger att $g(z) = e^{f(z)}$ är konstant i z-planet. Detta implicerar att $f(z)$ är konstant i z-planet.