

**Tentamen i 5B1201 Komplex analys för F och T,  
02–08–14, klockan 14:00–19:00.**

- Inga hjälpmmedel.
- Uppgifterna nedan är tillsammans värd 35 poäng.
- Normalt används följande betygsgränser: 16–21 p ger betyget 3, 22–27 p ger betyget 4 och 28–35 p ger betyget 5. Observera dock att dessutom kan helhetsintrycket påverka betyget—uppåt eller nedåt.
- Varje lösning skall åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar skall redovisas. I den mån man använder sig av kända satser, skall förutsättningarna för dessa anges.

1. Låt  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , vara en analytisk funktion.  
Visa att funktionen

$$g(x, y) = u(x, y)v(x, y)$$

är harmonisk. (5p)

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)(z-1)}$$

i en Laurentserie som konvergerar i cirkelringen  
 $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 1\}$ . (5p)

3. Låt  $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ,  $|z| < 1$ . Visa att för varje  $r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

(5p)

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{(5 - 3\cos t)} dt. \quad (5p)$$

5. Bestäm antalet rötter till ekvationen

$$f(z) = \cos \pi z - 100z^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

innanför enhetscirkeln  $\{z : |z| < 1\}$ . (4p)

6. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, \quad a > 0. \quad (6p)$$

7. Låt  $f$  vara en hel funktion och  $\operatorname{Im} f \geq M$ ,  $M$  är en konstant. Visa att  $f$  är en konstant för alla  $z$ .

(5p)

Lycka till!