Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201, Komplex analys för F, E och T, 02-10-16, klockan 14:00–19:00.

Tal 1. Funktionen $F(z) = f^3(z)+2f^2(z) = (u+iv)^3+2(u+iv)^2$ är analytisk. Därför är $\operatorname{Im} F(z) = 3u^2v - v^3 + 4uv$ harmonisk.

$$\Delta(\operatorname{Im} F(z)) = \Delta(3u^2v - v^3 + 4uv) = 0.$$

Tal 2.

$$w = \arctan z \quad \Longleftrightarrow \quad z = \tan w.$$

$$z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1} \quad \Longrightarrow \quad e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \quad \Longrightarrow$$
$$w = \arctan z = -\frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Tal 3. Låt $w = z-1$. Vi har

$$e^{\frac{z+1}{z-1}} = e^{\frac{w+2}{w}} = e\cdot e^{\frac{2}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e2^n}{n!}w^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z-1)^m,$$

där

$$a_m = 0, \quad m>0 \qquad a_m = \frac{e\,2^{-m}}{(-m)!}, \quad m\le 0.$$

Tal 4. Låt introducera substitutionen $z = e^{it}$, $dt = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$ som ger oss att

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos t + 2\sqrt{2}}\,dt = \int_{|z|=1}\frac{1}{(z+z^{-1}+2\sqrt{2})}\,\frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{(z^2+2\sqrt{2}z+1)}\,dz = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\Big(\frac{1}{z-1-\sqrt{2}}+\frac{1}{z+1-\sqrt{2}}\Big)\,dz = \pi.$$

Tal 5. Vi använder Rouchés sats. Låt $|z| = 0.5$.

$$|z^2 + \frac{1}{10}| \leq |z|^2 + \frac{1}{10}|e^{iz}| \leq 0.25 + \frac{\sqrt{e}}{10} \leq 0.5 = |z|$$

Svar: 1 nollställe.

Tal 6.

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{z^2 - 1}\, dz = [z = iy, -\infty < y < \infty] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-y^2 - 1)^2}\, i\, dy.$$

Vi integrerar funktionen

$$f(w) = \frac{1}{(w^2 + 1)} = \frac{1}{(w - i)(w + i)}$$

runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{w = u + iv \,:\, u^2 + v^2 = R,\, v > 0\}$, $I_R = \{w = u + iv \,:\, v = 0,\, -R \leq u \leq R\}$, $R > 1$. Funktionen f har en pol i punkten $w = i$ som ligger innanför Γ_R.

$$-\int_{\Gamma_R} f(w)\, i\, dw = -2\pi\, i\, \frac{i}{2i} = -i\pi.$$

Vi användar ML olikheten och får

$$\Big| \int_{C_R} f(w)\, dw \Big| \leq \max_{w \in C_R} |f(w)|\, \pi\, R \leq \frac{1}{(R^2 - 1)}\, \pi\, R \to 0, \quad \text{då} \quad R \to \infty.$$

Svar: $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{z^2-1}\, dz = -i\pi$.

Tal 7. Använd beviset av algebransfundamental stas.