Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201,
Komplex analys för F,
04–01-12, klockan 08:00–11:00.

Tal 1.

Cauchy-Riemann ekvationer för funktionen $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ger

$$u'_x = v'_y \qquad u'_y = -v'_x.$$

Om dessutom $\overline{f(x+iy)} = u(x,y) - iv(x,y)$ är analytisk, då

$$u'_x = -v'_y \qquad u'_y = v'_x.$$

Därför $u'_x \equiv u'_y \equiv v'_x \equiv v'_y \equiv 0$ som betyder att f är konstant.

Tal 2.
Lösning **I**.
Vi integrerar partiellt

$$\int_{1+i}^{3+3i} \operatorname{Log} z\, dz = \Big[z \operatorname{Log} z\Big]_{1+i}^{3+3i} - \int_{1+i}^{3+3i} dz$$

$$= (3+3i)\operatorname{Log}(3+3i) - (1+i)\operatorname{Log}(1+1i) - (2+2i)$$

$$= (3+3i)(\log(3\sqrt{2}) + i\pi/4) - (1+i)(\log(\sqrt{2}) + i\pi/4) - 2 - 2i$$

$$= (1+i)(\log 2 + 3\log 3 - 2) - (1-i)\pi/2.$$

Lösning **II**.

$$\int_C \operatorname{Log} z\, dz = \int_C (\log|z| + i\pi/4)\, dz = \int_1^3 (\log(\sqrt{2}\,t) + i\pi/4)\,(1+i)\, dt$$

$$= \int_1^3 (\log(\sqrt{2}\,t) - \pi/4)\, dt + i\int_1^3 (\log(\sqrt{2}\,t) + \pi/4)\, dt$$

$$= (1+i)\int_1^3 (\log(\sqrt{2}\,t)\,dt - (1-i)\int_1^3 \pi/4\,dt.$$

För att beräkna $\int_1^3 \log(\sqrt{2}\,t)\,dt$ integrerar vi partiellt

$$\int_1^3 \log(\sqrt{2}\,t)\,dt = \int_1^3 \frac{1}{2}\log 2\,dt + \int_1^3 \log t\,dt = \log 2 + \Big[t\log t\Big]_1^3 - \int_1^3 t\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \log 2 + 3\log 3 - 2.$$

Svar:

$$\int_C \operatorname{Log} z\,dz = (1+i)(\log 2 + 3\log 3 - 2) - (1-i)\pi/2.$$

Tal 3.

$$\frac{z^3}{-z^2+3z-2} = \frac{-z^3}{(z-2)(z-1)} = \frac{-z^3}{z-1} - \frac{-z^3}{z-2}$$

Om $1 < |z|$, då

$$\frac{-z^3}{z-1} = \frac{z^3}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{k=-\infty}^{2} z^k.$$

Om $|z| < 2$, då

$$\frac{-z^3}{z-2} = \frac{z^3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{z^3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k-2}}.$$

Svar:

$$\frac{z^3}{-z^2+3z-2} = \sum_{k=-\infty}^{2} z^k + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k-2}}.$$

Tal 4. Låt $h(z) = 7z^2+2$ och $g(z) = z^5+3z$. Om $|z| = 1$ då

$$|g(z)| = |z^5+3z^2| \le 4 < 5 \le |7z^2+2| = |f(z)|.$$

Rouches sats ger då att $f(z)$ har lika många nollställen som $h(z)$ innanför $\{z : |z| = 1\}$, dvs två nollställen.