Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201,
Komplex analys för F,
04-08-18, klockan 14:00–17:00.

Tal 1.

Låt $u(x,y) = \sin(3x)\cosh(3y)$.
C-R ekvationer ger oss att

$$u'_x = 3\cos(3x)\cosh(3y) = v'_y \quad \Longrightarrow$$

$$v(x,y) = 3\int \cos(3x)\cosh(3y)\,dy = \cos(3x)\sinh(3y) + c(x).$$

$$v'_x = -3\sin(3x)\sinh(3y) + c'(x) = -u'_y = -\sin(3x)\sinh(3y)$$

$$\Longrightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(x) = k = konstant.$$

Därför

$$f(z) = u + iv = \sin(3x)\cosh(3y) + i\cos(3x)\sinh(3y) + ik$$

$$= \sin(3(x+iy)) + ik = \sin(3z) + ik.$$

Svar: $f(z) = \sin(3z) + ik, \quad k \in \mathbb{R}$.

Tal 2.

$$\frac{2\,e^z}{z - i\pi/4} = \frac{2\,e^{i\pi/4}e^{z-i\pi/4}}{z - i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{z - i\pi/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(z - i\pi/4)^n$$

$$= \sum_{m=-1}^{\infty} c_m (z - i\pi/4)^m,$$

Där $c_m = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(m+1)!}$, $m = -1, 0, 1, \ldots$.

Tal 3. Låt

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

och

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1}.$$

Vi integrerar funktionen f runt $\Gamma_R = \Gamma_{1,R} + \Gamma_{2,R} + \Gamma_{3,R}$, där

$\Gamma_{1,R} = \{z = x+iy \,:\, 0 \le x \le R,\ y = 0\}$,

$\Gamma_{2,R} = \{z = x+iy \,:\, z = Re^{\phi},\ 0 \le \phi \le 2\pi/3\}$,

$\Gamma_{3,R} = \{z = x+iy \,:\, z = re^{2\pi/3},\ R \ge r \ge 0\}$, $R > 1$.

Funktionen f har en pol av ordning 1 i punkten $z = e^{i\pi/3}$ som ligger innanför Γ_R. Residysatsen ger

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z), e^{i\pi/3}\right] = 2\pi i \lim_{z\to e^{i\pi/3}} \frac{z(z-e^{i\pi/3})}{z^3+1}$$

(p.g.a. L'Hôpitals regel)

$$= 2\pi i \lim_{z\to e^{i\pi/3}} \frac{(z-e^{i\pi/3})+z}{3z^2} = \frac{2\pi i\, e^{i\pi/3}}{3e^{2i\pi/3}} = \frac{2\pi i}{3}\, e^{-i\pi/3}.$$

Därför

$$\int_{\Gamma_{1,R}} \frac{z}{z^3+1}\,dz + \int_{\Gamma_{2,R}} \frac{z}{z^3+1}\,dz + \int_{\Gamma_{3,R}} \frac{z}{z^3+1}\,dz = \frac{2\pi i}{3}\, e^{-i\pi/3}. \qquad (*)$$

a. Vi användar ML olikheten och får

$$\Big|\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{z}{z^3+1}\,dz\Big| \le \max_{z\in\Gamma_{2,R}} \Big|\frac{z}{z^3+1}\Big| \frac{2\pi R}{3} \le \frac{R}{R^3-1}\,\frac{2\pi R}{3} \to 0, \quad R\to\infty.$$

b.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{1,R}} \frac{z}{z^3+1}\,dz = \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx.$$

c.

$$\int_{\Gamma_{3,R}} \frac{z}{z^3+1}\,dz = \int_R^0 \frac{re^{2i\pi/3}}{r^3+1}\, e^{2i\pi/3}\,dr \to$$

$$\to -e^{4i\pi/3} \int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}\,dr = e^{i\pi/3} \int_0^\infty \frac{r}{r^3+1}\,dr, \qquad R\to\infty.$$

Vi får från (*) att

$$I\,(1+e^{\pi i/3}) = \frac{2\pi i}{3}\,e^{-i\pi/3}.$$

Svar:

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Tal 4. Låt $z = w+1$. Då

$$f(z) = f(w+1) = w^4 + 4w + 1.$$

Om $h(w) = 4w$ och $g(w) = w^4+1$ då får vi att

$$|g(w)| = |w^4+1| \le 2 < 4 \le |4w| = |h(w)|, \qquad |w| = 1.$$

Rouches sats ger då att $f(z) = f(w+1)$ har lika många nollställen som $h(w)$ innanför $\{w : |w| = 1\}$, dvs ett nollställe.