Institutionen för Matematik, KTH
Karim Daho och Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201, Komplex analys för E,F och T, 01–10-24, klockan 8:00–13:00.

Tal 1. Funktionen $F(z) = f^3(z) = (u(x,y) + iv(x,y)^3$ är analytisk. Därför är $\mathrm{Re}F(z) = (u^3 - 3uv^2)$ harmonisk.

$$\Delta(\mathrm{Re}F(z)) = \Delta(u^3 - 3uv^2) = 0.$$

Tal 2.

$$\frac{2\tan z}{1+\tan^2 z} = \frac{2}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{i^2}\frac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{(e^{iz}+e^{-iz})^2}} =$$

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\cdot\frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2}{(e^{iz}+e^{-iz})^2-(e^{iz}-e^{-iz})^2} =$$

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{(e^{iz}-e^{-iz})\cdot(e^{iz}+e^{-iz})}{4} = \sin 2z.$$

Tal 3. Låt $w = z - i$. Vi har

$$(z^2+1)e^{\frac{1}{z-i}} = ((w-i)^2+1)e^{\frac{1}{w}} = (w^2-2iw)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{-n}}{n!} = \sum_{m=-2}^{\infty} b_m(z-i)^{-m},$$

där

$$b_m = \frac{1-2i(m+2)}{(m+2)!} \qquad m = -2,-1,0,1\ldots.$$

Tal 4. Låt introducera substitutionen $z = e^{it}$, $dt = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$ som ger oss att

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2-i\cos t+\sin t)}dt = \int_{|z|=1}\frac{1}{(2-iz)iz}dz =$$

$$= 2\pi i\ \mathrm{Res}\Big\{\frac{1}{(2-iz)iz}, 0\Big\} = \pi.$$

Tal 5. Vi använder Rouchés sats

$$|\sin z| \le e^3, \quad \text{där} \quad |z| = 3.$$

Altså

$$|\sin z| < |z^3| = 3^3, \quad \text{där} \quad |z| = 3.$$

Svar: 3 nollställen.

Tal 6. P.g.a. att $\sin tx$, $t \in \mathbb{R}$ är en udda funktion av x, har vi

$$F(t) = F(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{(x^2+1)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Låt $t \ge 0$. Vi integrerar funktionen

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{(z^2+1)^2} = \frac{e^{itz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{z = x+iy \,:\, x^2+y^2 = R,\ y > 0\}$, $I_R = \{z = x+iy \,:\, y = 0,\ -R \le x \le R\}$, $R > 1$. Funktionen f har en pol av ordning två i punkten $z = i$ som ligger innanför Γ_R. Residusatsen ger att

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[f(z), i\Big] =$$

$$2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\Big(\frac{e^{itz}}{(z+i)^2}\Big) = \pi\,(t+1)e^{-t}/2.$$

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\, dz\Big| \le \max_{z\in C_R} |f(z)|\, \pi\, R \le \frac{1}{(R^2-1)^2}\, \pi\, R \to 0, \quad \text{då} \quad R \to \infty.$$

Därför

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2+1)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz =$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \pi\,(t+1)e^{-t}/2.$$

Svar: $F(t) = \pi\,(1+t)e^{-t}/2$, då $t \ge 0$ och $F(t) = \pi\,(1-t)e^{t}/2$, då $t \le 0$.

Tal 7. Låt $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Därför $\overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$. Om $g(z) = p(x,y) + iq(x,y) = \overline{f(\overline{z})}$, då

$$p(x,y) = u(x,-y) \qquad \text{och} \qquad q(x,y) = -v(x,-y).$$

Vi kontrollerar Cauchy-Riemanns ekvationer

$$p'_x(x,y) = u'_x(x,t)|_{t=-y} = v'_t(x,t)|_{t=-y} = q'_y(x,y),$$

$$p'_y(x,y) = -u'_t(x,t)|_{t=-y} = v'_x(x,t)|_{t=-y} = -q'_x(x,y).$$