Institutionen för matematik
KTH

Förslag till lösning till Tentamen, Diff. och Trans. II, del 1, för F2, 5B1202 onsdagen den 19 december 2001, kl. 8.00-13.00

1. a) Vi observerar att ekvationen är separabel och erhåller

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{x}{1+x^2} + C.$$

Efter partialbråksuppdelning erhålles:

$$-\int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+1}\right] dy = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\, dx + C$$

eller

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|y+1|}{|y-1|} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Integrationskonstanten C bestäms av begynnelsevillkoret $y(-1) = 3$ och vi får att $C = 0$. I närheten av punkten $(-1, 3)$ kan vi efter exponentiering och teckenval skriva ekvationen som

$$\frac{y+1}{y-1} = (1+x^2)$$

och vi får efter att ha löst ut y som funktion av x att $y = y(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$.

Svar. Lösningen är $y = y(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$.

b) Vi ser att denna lösning är definierad för $x < 0$ och att $y > 1$ för alla $x > 0$ och satisfierar differentialekvationen där.

Svar. Existensintervallet är $x < 0$.

2. a) Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Efter utveckling av determinanten får vi $\lambda^2 + 6\lambda + 7 = 0$ och lösningarna blir $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2}$ vilka båda är negativa, således är $(0,0)$ *en stabil knut (nod).*

b) Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

och vi får andragradsekvationen $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, som har lösningarna $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -1$. I detta fall får vi en sadelpunkt, vilken ju är instabil.

Svar. $(0,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

c) Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

vilket ger $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, som har dubbelroten $\lambda_{1,2} = 4$. Vi får således en instabil oegentlig knut.

Svar. $(0,0)$ är en instabil oegentlig knut.

3. Vi observerar att högerledet är en faltning mellan funktionen $y(t)$ och $\cos(t)$. Efter Laplacetransformering erhåller vi därför

$$s\tilde{y} - y(0) = \tilde{y}\mathcal{L}(\cos(t))(s).$$

Med insättning av begynnelsevärdet och $\mathcal{L}(\cos(t))(s) = s/(s^2+1)$ fås

$$s\tilde{y} - 1 = \tilde{y}\frac{s}{s^2+1}.$$

Då $\tilde{y}$ löses ut som funktion av s erhålles

$$\tilde{y} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

och invers Laplacetransformering ger

$$y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}, \qquad t \geq 0$$

Svar. Lösningen är $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$ för $t \geq 0$.

Anm. I Boyce-diPrima står inget om existens och entydighet för differentialintegralekvationer men det är lätt att se att fixpunktargumentet i Picards metod fungerar även i detta fall.

4. Låt oss skriva systemet av differentialekvationer som

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy = F(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -2y + xy = G(x,y). \end{cases}$$

Låt oss också skriva det $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ där $\mathbf{x}$ är en vektor (x, y) och $f(\mathbf{x}) = (F(x,y), G(x,y))$ är en funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

a) De kritiska punkterna ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} F(x,y) = x(5 - x - y) = 0 \\ G(x,y) = y(-2 + x) = 0. \end{cases}$$

Detta ger lösningarna

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Svar. De kritiska punkterna är $(0,0)$, $(5,0)$ och $(2,3)$.

b) Jacobimatrisen ges av

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2x - y & -x \\ y & -2 + x \end{bmatrix}$$

I punkten $(0,0)$ är

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Detta är en sadelpunkt och den instabila mångfalden har tangentvektor $(1,0)$ och den instabila tangentvektor $(0,1)$ i $(0,0)$.

I punkten $(5,0)$ är

$$Df(5,0) = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Även detta är en sadelpunkt och den instabila mångfalden har tangentvektor $(1,-8/5)$ och den stabila tangentvektor $(1,0)$.

I punkten $(2,3)$ är

$$Df(2,3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

och den karakteristiska ekvationen blir

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

vilket ger $\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$ och $\lambda = -1 \pm i\sqrt{5}$, vilket motsvarar en inåtgående spiral. Den har omloppsriktning i positiv led (moturs) ty man inser att för en lösningskurva $(x(t), y(t))$, som går genom $(2+\epsilon, 3)$ ($\epsilon > 0$ där ϵ tillräckligt litet) för $t = t_0$ måste $y'(t_0) > 0$.

Svar De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $(5,0)$ som är en sadelpunkter och $(2,3)$, som är en inåtgående spiral.

Anm. Det gäller att för alla begynnelsepunkter (x_0, y_0) med $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ går lösningstrajektorierna mot den stabila jämviktspunkten $(2,3)$, som således är en stabil jämvikt för det ekologiska systemet, men detta ingick inte i uppgiften.

[Figur kommer in här senare.]

5. Vi skriver differentialekvationen på komplex form:

$$2zw'' + (3+2z)w' - 2w = 0.$$

Denna ekvation är reguljärt singulär och vi gör potensserieansatsen

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\rho}$$

Derivering två gånger och insättning i ekvationen ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\rho)(n+\rho-1)a_n z^{n+\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(n+\rho)z^{n+\rho-1}$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)a_n z^{n+\rho} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+\rho} = 0.$$

Den lägsta förekommande potensen är $z^{\rho-1}$ vilket ger

$$a_0\left[2\rho((\rho-1)+3\rho)\right] = 0$$

och eftersom $a_0 \neq 0$ får indexekvationen $2\rho(\rho-1)+3\rho = 0$ vilket ger rötterna $\rho_1 = 0$ och $\rho_2 = -\frac{1}{2}$.

För roten med största realdel och indexförskjutning ett steg i de två sista summorna fås rekursionsformeln

$$\left[n(n-1)+3n\right]a_n + \left[2(n-1)-2\right]a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1.$$

eller förenklat

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(n+2)}(2n-4), \qquad n \geq 1.$$

Vi ser att $a_1 = -\frac{1}{3}a_0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $\ldots$. Detta ger en lösning

$$w_1(z) = a_0(1 + \frac{2}{3}z).$$

och speciellt om $a_0 = 1$ en lösning $W_1(z) = (1+\frac{2}{3}z)$. Eftersom $\rho_1 - \rho_2$ ej är ett heltal fås en linjärt oberoende lösning fås från motsvarande rekursionsformel med $\rho = -\frac{1}{2}$.

$$[(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2}) + 3(n-\tfrac{1}{2})]a_n + [2(n-\tfrac{1}{2})-2]a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1.$$

Man vet av teorin (men kan i detta fall också verifiera det direkt explicit) att vi får en följd koefficienter a_n, $n \geq 0$ och en lösning

$$w_2(z) = z^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 W_2(z),$$

där $W_2(z) = z^{-\frac{1}{2}}(1 + \mathcal{O}(z))$. Den allmänna lösningen kan skrivas på formen $w(z) = AW_1(z) + BW_2(z)$ och villkoret $w(0) = 0$ ger först att $B = 0$ ty den sökta lösningen är begränsad nära 0 och slutligen fås $A = 0$ ty annars är $w(0) = A \neq 0$.

Svar. Den enda lösning som uppfyller begynnelsevärdet $y(0) = 0$ är funktionen som är identiskt lika med 0.

6. Det autonoma systemet ges av

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - xe^{x^2+y^2} & (1) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - ye^{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

Vi ser att $(x, y) = (0, 0)$ är en kritisk punkt. Vi påstår först att origo är den enda kritiska punkten vilket man ser på följande sätt.

Efter införande av polära koordinater fås

$$\begin{cases} 3r\cos\theta - r\sin\theta - r\cos\theta e^{r^2} = 0 \\ r\cos\theta + 3r\sin\theta = \sin\theta \cdot e^{r^2}. \end{cases}$$

Om $\theta \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$, n heltal och $r \neq 0$ kan vi förkorta med r och dividera ekvationerna med $\cos\theta$ resp. $\sin\theta$ och erhåller

$$\frac{1}{\tan\theta} + 3 = 3 - \tan\theta = e^{r^2},$$

som saknar lösningar. Man ser att då $r \neq 0$ kan ej heller $\theta = \pi n/2$ vara en lösning.

Med $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ fås $r^2 = x^2 + y^2$. Derivering och förkortning med 2 ger

$$\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Efter multiplikation av (1) med x och (2) med y och addition av ekvationerna fås

$$\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 3r^2 - r^2 e^{r^2}$$

Vi ser att då $r = \varepsilon$ med $\varepsilon > 0$ och litet gäller $r'(t) > 0$ varför lösningarna går utåt och p.s.s. gäller för $r = R$ och R stort, $R >> 1$ att lösningskurvorna går inåt. Detta innebär att ringområdet $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ är invariant och att kritiska punkter saknas där. Enligt Poincaré-Bendixsons sats gäller då att det finns en periodisk lösning, vilket är det sökta resultatet.

Anm. I detta fall kan man lätt bestämma den periodiska lösningen explicit.

Man får en motsvarande ekvation för vinkeln $\theta = \arctan(y/x)$ där man väljer en lämplig gren av arcustangens i de olika kvadranterna. Vi får med insättning av ekvationerna (1) och (2) att

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = 1,$$

vilket ger $\theta = t + \theta_0$. Man ser att den radiella ekvationen

$$\frac{dr}{dt} = 3r - re^{r^2},$$

vilken har en konstant lösning $r = \sqrt{\ln 3}$. Vi får därför den periodiska lösningen

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\ln 3}\cos(t + \theta_0) \\ y(t) = \sqrt{\ln 3}\sin(t + \theta_0) \end{cases}.$$