Institutionen för matematik
KTH
Avd. Matematik

TENTAMEN, 5B1202, del 1
Differentialekvationer och transformer för F2
Onsdagen den 19 december 2001, 8.00-13.00

Hjälpmedel: formelsamlingen BETA

Instruktioner: Tentamen består av 6 uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 3p och eventuella bonuspoäng ger maximalt 3p. För godkänt (betyg 3) krävs 9p, för betyg 4 krävs 13.5 p och för betyg 5 krävs 16.5 p. För poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) Sök den lösning till differentialekvationen

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}(1-y^2)$$

för vilken $y(-1) = 3$. (2p)

(b) Bestäm lösningens existensintervall. (1p)

2. Avgör för vart och ett av nedanstående system vilken typ av kritisk punkt origo är. Ange också om denna kritiska punkt är stabil eller instabil.

a)
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (1p)$$

b)
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (1p)$$

c)
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad (1p)$$

3. Lös integral-differentialekvationen

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(u)\,\cos(t-u)\,du \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(3p)

4. Betrakta följande autonoma system av differentialekvationer som är en modell för ett ekologiskt rovdjurs-bytesproblem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + xy. \end{cases}$$

Här uppfyller bytesdjurspopulationen $x(t)$ en differentialekvation av logistisk typ medan rovdjurspopulationen $y(t)$ skulle i frånvaro av bytesdjur avta naturligt.

a) Bestäm systemets kritiska punkter. (0.5p)

b) Undersök de kritiska punkternas karaktär via lineariseringar kring de funna punkterna. Om det går att dra en slutsats via lineariseringen: ange typ av fasporträtt och om punkten är stabil eller inte. Skissera också, i det fall en sådan slutsats kan dras, fasporträttet lokalt nära motsvarande kritiska punkt. (2.5p)

5. Avgör om det finns någon lösning till differentialekvationen

$$2xy'' + (3+2x)y' - 2y = 0$$

med begynnelsevärde $y(0) = 0$, som ej är identiskt lika med 0. (3p)

6. Visa att det linjära autonoma systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - xe^{x^2+y^2} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - ye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

har en periodisk lösning. (3p)

LYCKA TILL!