Institutionen för Matematik, KTH

LÖSNINGSFÖRSLAG
till tentamen i 5B1202, del I
Differentialekvationer och transformer för F2

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$xy' - y = \frac{1}{y}$$

som uppfyller begynnelsevillkor $y(1) = -2$. Bestäm även lösningens existensintervall.

Lösning.

Vi omskriver ekvationen till

$$xy' = y + \frac{1}{y}.$$

Nu det är en ekvation med separabla variabler. En omskrivning till ger

$$y' \frac{y}{y^2 + 1} = \frac{1}{x}$$

och efter integrering vi får

$$\log(y^2 + 1) = \log(x^2) + 2C,$$

vilket ger

$$y(x) = \pm\sqrt{C_1 x^2 - 1}.$$

Insättning av begynnelsevillkor $y(1) = -2$ ger $C_1 = 5$ och urval av $-\sqrt{\ldots}$. Alltså lösningen är

$$y(x) = -\sqrt{5x^2 - 1}.$$

Funktionen $\sqrt{t}$ är definerad och deriverbar för $t > 0$. Då villkor $5x^2 - 1 > 0$ ger definitionsintervall $x \in (1/\sqrt{5}, +\infty)$.

Det går också att lösa ursprunglig ekvation som Bernoullis ekvation genom insättning $y(x) = \pm\sqrt{z(x)}$ med en ny obekant funktion $z(x)$.

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$t^2 y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = \ln t, \quad t > 0.$$

Lösning.

Det är en Eulers ekvation. Det bästa sätt att lösa den är att införa en ny oberoende variabel $x = \log t$. Då man har

$$y(t) = u(\log t), \quad y'(t) = \frac{u'(\log t)}{t} \quad \text{och} \quad y''(t) = \frac{u''(\log t)}{t^2} - \frac{u'(\log t)}{t}.$$

Hela ekvationen blir då

$$u''(x) - 2u'(x) - 3u(x) = x.$$

Det charakteristiska polynomet till den homogena ekvationen är $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ som har rötter $\lambda = -1$ och $\lambda = 3$. Alltså den homogena lösningen är $u(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. För att hitta någon partikulär inhomogenlösning, använder vi ansatsmetod: vi söker lösninger i form $u_p(x) = ax + b$. Ansättning till ekvationen ger $a = -1/3$ och $b = 2/9$. Vi får alltså

$$u(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

och

$$y(t) = C_1 \frac{1}{t} + C_2 t^3 - \frac{1}{3}\log t + \frac{2}{9}.$$

3. För linära systemet

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2; \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

(a) Bestäm en fundamentalmatris $\Phi(t)$ till systemet som uppfyller begynnelsevillkor $\Phi(0) = I$, där I är enhetsmatrisen.

(b) Ange vilket typ av fasporträtt systemet har nära origo. Är origo stabil eller instabil jämviktspunkt?

(c) Rita fasporträtt till systemet i (x_1, x_2)-planet.

Lösning.

(a) En fundamentalmatris är matris vars kolumner är linärt oberoende lösningar till systemet. Vi kan söka då fundamentalmatrisen $\Phi(t)$ i form

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{pmatrix},$$

där

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

är lösningar till systemet som uppfyller begynnelsevillkor

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kommer nu att hitta två linärt oberoende lösningar till systemet. Det kan omskrivas som

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{med} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det charakteristiska polynomet till $\mathbf{A}$ är $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Vi har två egenvärden som sammanfaller. Den första lösningen ges av

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{2t}\boldsymbol{\xi},$$

där

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

är en egenvektor till $\mathbf{A}$ som stämmer till $\lambda = 2$. Vi får ett algebraiskt system för $\boldsymbol{\xi}$:

$$\begin{cases} 3\xi_1 - 3\xi_2 = 0, \\ 3\xi_1 - 3\xi_2 = 0 \end{cases}$$

som ger (t ex)

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nu söker vi den andra lösningen i form

$$\mathbf{x}^{(2)}t) = \mathbf{a}e^{2t} + \mathbf{b}te^{2t},$$

där

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

är två obekanta vektorer. Insättning till systemet ger

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{b} = 0, \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{a} = \mathbf{b}. \end{cases}$$

Från den första ekvationen vi hittar

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

medan den andra ger systemet

$$\begin{cases} 3a_1 - 3a_2 = 1, \\ 3a_1 - 3a_2 = 1. \end{cases}$$

som har en lösning (t ex)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nu vi söker lösningarna $\mathbf{x}(t)$ och $\mathbf{y}(t)$ i form

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}^{(1)}(t) + B\mathbf{x}^{(2)}(t) \quad \text{och} \quad \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}^{(1)}(t) + D\mathbf{x}^{(2)}(t).$$

Insättning av begynnelsevillkor ger $A = 0$, $B = 3$, $C = 1$ och $D = -3$. Alltså fundamentalmatrisen är

$$\Phi(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+3t & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix}.$$

(b) Två egenvärde som sammanfaller och är skilda från 0 ger en degenererade nod. Eftersom egenvärdena är positiva, origo är instabil.

4. Lös begynnelsevärdesproblem

$$y'' + y' - 2y = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1; \\ e^{-t}, & 1 \le t < 2; \\ 0, & 2 \le t. \end{cases}$$
$$y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Lösning.

Vi använder Laplacetransform. För att hitta transform av högerledet (HL), det är bäst att använda definition direkt. Vi får då

$$\mathcal{L}\{HL\}(s) = \int_1^2 e^{-t}\, e^{-ts}\, dt = \int_1^2 e^{-t(s+1)} dt =$$

$$= -\frac{1}{s+1}\, e^{-t(s+1)}\Big|_{t=1}^{t=2} = -\frac{1}{s+1}e^{-2s}e^{-2} + \frac{1}{s+1}e^{-s}e^{-1}.$$

Ekvationen efter Laplacetransformering blir

$$s^2Y(s) - s\cdot 0 - 1 + sY(s) - 0 - 2Y(s) = -e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1} + e^{-1}\frac{e^{-s}}{s+1}.$$

Vi får då

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} - e^{-2}\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s+2)(s+1)} + e^{-1}\frac{e^{-s}}{(s-1)(s+2)(s+1)}.$$

Nu vi skriver partiellbråkuppdelningar

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1/3}{s-1} + \frac{-1/3}{s+2}$$

och

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{1/6}{s-1} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/3}{s+2}$$

och med hjälp av translationssatser kommer vi fram till lösningen

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} - e^{-2}u_2(t)\left(\frac{1}{6}e^{t-2} - \frac{1}{2}e^{-(t-2)} + \frac{1}{3}e^{-2(t-2)}\right) + e^{-1}u_1(t)\left(\frac{1}{6}e^{t-1} - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-2(t-1)}\right).$$

5. För det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = x + x^2 - 2xy; \\ y' = xy - y. \end{cases}$$

(a) Bestäm alla kritiska punkter.

(b) Undersök dem genom linearisering av systemet. För varje kritisk punkt ange typ av fasporträtt samt stabilitetsegenskaper.

Lösning. Vi söker först kritiska punkter. De är lösningar till algebraiska systemet

$$\begin{cases} x + x^2 - 2xy = 0; \\ xy - y = 0. \end{cases}$$

Från den andra ekvationen får vi $x = 1$ eller $y = 0$. Insättning av $x = 1$ till den första ekvationen ger $y = 1$ och insättning av $y = 0$ till den första ekvationen ger $x = 0$ eller $x = -1$. Alltså vi fick kritiska punkterna $(0,0)$, $(-1,0)$ och $(1,1)$. Vi hittar nu den jakobianska matrisen till högerledet:

$$\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2x-2y & -2x \\ y & x-1 \end{pmatrix}.$$

Den ger oss matrisen för lineariserade systemet nära varje av de kritiska punkter. För den kritiska punkten $(0,0)$ matrisen för lineariserade systemet är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den har egenärdena 1 och -1 och det är fallet av en sadelpunkt, som är alltid instabil.

För punkten $(-1,0)$ vi har

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärdena -1 och -2 och det är fallet av en stabil nod.

För punkten $(1,1)$ matrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är $1/2 \pm i\sqrt{7}/2$ och det är fallet av en instabil spiral.

6. Bestäm alla lösningar i form av en potensserie till ekvationen

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - (4x^2+1)y(x) = 0$$

nära den singulära punkten $x_0 = 0$ som är definerade för positiva x och *begränsade* nära $x_0 = 0$.

Lösning. Vi omskriver ekvationen först till

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4x^2+1}{4x^2}y = 0.$$

Då $p(x) = 1/x$ som har pole av ordning 1 och $q(x) = -\dfrac{(4x^2+1)}{4x^2}$ som har pole av ordning 2. Det betyder att vi har en reguljär singularitet. Vi hittar också $p_0 = 1$ och $q_0 = -1/4$ vilket ger indicial ekvation

$$r^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Lösningarna till den är $r_1 = 1/2$ och $r_2 = -1/2$ och vi ser att dem är skilda med ett heltal 1. Då två linärt oberoende lösningar till ekvationen ges av formler

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} \quad \text{med} \quad a_0 \neq 0$$

och

$$y_2(x) = ay_1(x)\log x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1/2} \quad \text{med} \quad b_0 \neq 0.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Vi har också

$$\lim_{x\to 0+0} y_1(x) = 0$$

och

$$\lim_{x\to 0+0} y_2(x) = \lim_{x\to 0+0}\left[x^{-1/2}\cdot \underbrace{\left(ax^{1/2}y_1(x)\log x + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)}_{\lim_{x\to 0+0} = b_0 \neq 0}\right] = \infty.$$

Vi ser att lösningen $C_1y_1 + C_2y_2$ är begränsad nära origo om och endast om $C_2 = 0$. Det betyder att alla begränsade lösningar har formen $Cy_1(x)$.

Nu vi hittar koefficienterna a_n. Vi har

$$(4x^2+1)y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = \sum_{m=2}^{\infty} 4a_{m-2} x^{m+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-2} + a_n) x^{n+1/2} + 4a_0 x^{1/2} + 4a_1 x^{3/2};$$

$$4xy_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1/2) a_n x^{n+1/2} = \sum_{n=2}^{\infty} (4n+2) a_n x^{n+1/2} + 2a_0 x^{1/2} + 6a_1 x^{3/2}$$

$$\text{och} \quad 4x^2 y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+\frac{1}{2})(n-1/2) a_n x^{n+1/2} = \sum_{n=2}^{\infty} (4n^2-1) a_n x^{n+1/2} - a_0 x^{1/2} + 3a_1 x^{3/2}.$$

Insättning till ekvationen ger

$$\sum_{n=2}^{\infty} (4n(n+1)a_n - 4a_{n-2}) x^{n+1/2} + 8a_1 x^{3/2} = 0.$$

Vi får då

$$a_1 = 0 \quad \text{och} \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \quad \text{för} \quad n \geq 2.$$

För udda $n = 1, 3, \ldots$ vi får $a_n = 0$ och för jämna $n = 2, 4, \ldots$ vi får

$$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ \ldots, \ a_n = \frac{a_0}{(n+1)!}.$$

Alltså (för urvalet $a_0 = 1$)

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1/2}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh x}{\sqrt{x}}.$$