Lösningsförslag till tentamen
i Differentialekvationer och transformer II för T2
fredagen den 07 mars 2003

1. En man tog ett bolån med beloppet X_0 kronor i banken för att köpa en villa. Om årlig bankränta är r (som antas vara konstant) och årlig återbetalning av lånet efter t år är $A(t)$, då uppfyller skuldbeloppet $X(t)$ efter t år en differentialekvation

$$\frac{dX}{dt} = rX(t) - A(t).$$

Mannen hoppas att hans inkomst (och återbetalningsförmåga) kommer att växa linärt i tiden, d v s $A(t) = A_0 + \alpha t$.

Under ovanstående antaganden

(a) Bestäm skuldbeloppet $X(t)$ efter t år.

(b) Ange villkor för parametrarna X_0,r,A_0 och α som garanterar att hela lånet återbetalas inom ändlig tid (d v s att $X(t)$ blir 0 för något positivt t). Alla parametrar antas vara positiva.

Lösning: Vi måste lösa begynnelsevärdesproblem

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = rX(t) - A_0 - \alpha t \ ; \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Det är en linär ekvation av första ordningen som har standartformen

$$\frac{dX}{dt} - rX(t) = -A_0 - \alpha t.$$

Integrerande factorn till den är

$$\mu(t) = \exp\left(\int (-r)dt\right) = e^{-rt}.$$

Efter multiplicering med den ekvationen tar formen

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-rt}X(t)\right) = -A_0 e^{-rt} - \alpha t e^{-rt}.$$

Integrering ger

$$e^{-rt}X(t) = C + \frac{A_0}{r}e^{-rt} + \frac{\alpha}{r}te^{-rt} + \frac{\alpha}{r^2}e^{-rt},$$

vilket ger

$$X(t) = Ce^{rt} + \frac{A_0}{r} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha}{r}t.$$

Insättning av begynnelsevillkor ger

$$C = X_0 - \frac{A_0}{r} - \frac{\alpha}{r^2}.$$

Alltså lösningen är

$$X(t) = \left(X_0 - \frac{A_0}{r} - \frac{\alpha}{r^2}\right)e^{rt} + \frac{A_0}{r} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha}{r}t.$$

Vi observerar att om konstanten $C = X_0 - \frac{A_0}{r} - \frac{\alpha}{r^2}$ är positiv eller 0 då lösningen blir positiv för alla $t > 0$ (och även växande funktion). Å andra sidan, om C är negaiv, då exponential term Ce^{rt} i lösningen är negativ och har snabbt växande absolut belopp och term

$$\frac{A_0}{r} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha}{r}t$$

växer långsammare för stora t än första termen (ty exponentialfunktion växer snabbare än potensfunktion). Det betyder att för stora t hela lösningen blir negativ och då $X(t)$ måste vara 0 för något $t > 0$. Alltså villkor för att $X(t)$ blir 0 för något positivt t är

$$X_0 < \frac{A_0}{r} + \frac{\alpha}{r^2}.$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x} \quad , \ x \neq 0.$$

Lösning. Det är en linär inhomogen ekvation med konstanta koefficienter. Vi börjar först med att lösa den homogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$. Det karakteristiska polynomet till den är $Z(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ som har två sammanfallande nollställen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Då den allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

För att hitta en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen, använder vi variation av parametrar metod (obs! ansatsmetod fungerar inte i vårt fall eftersom den inhomogena termen har inte form av exponent eller polynom eller sin, cos, eller deras produkt). Vi söker en partikulär lösning i form

$$y_p(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Då

$$y_p'(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)(x+1)e^x + C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x.$$

Vi sätter nu krav för $C_1(x)$ och $C_2(x)$:

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0.$$

Då får vi

$$y_p'(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)(x+1)e^x$$

och

$$y_p''(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)(x+2)e^x + C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x.$$

Hela ekvationen blir då

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \frac{e^x}{x}.$$

Tillsammans med tidigare krav får vi ett algebraiskt system för $C_1'(x)$ och $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \ ; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Det har lösningarna $C_1'(x) = -1$ och $C_2'(x) = \frac{1}{x}$. Fi får då $C_1(x) = -x$ och $C_2(x) = \log|x|$ vilket ger partikulär lösningen

$$y_p(x) = -xe^x + xe^x \log|x|.$$

Alltså den allmänna lösningen blir

$$y(x) = e^x(x \log|x| + C_1 x + C_2).$$

Det går bra också att hitta först någon lösning till den homogena ekvationen (t ex $y(x) = e^x$) och sedan använda reduktion av ordning metoden.

3. Bestäm lösningen till systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

som uppfyller begynnelsevillkor

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Lösning. Låt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Då systemet har formen

$$\begin{cases} x_1' = -\,x_3\ ; \\ x_2' = x_2; \\ x_3' = -\,x_1. \end{cases}$$

Man kan observera att den andra ekvationen är oberoende av övriga ekvationer d v s att funktionen x_2 ingår bara i andra ekvationen och funktionerna x_1 och x_3 ingår bara i den första och den tredje ekvationer. Det betyder att man kan lösa separat ekvationen $x_2' = x_2$ för den andra funktionen och systemet

$$\begin{cases} x_1' = -\,x_3\ ; \\ x_3' = -\,x_1 \end{cases}$$

för funktionerna x_1 och x_3. Vi får då $x_2(t) = Ce^t$ och från begynnelsevillllkor $x_2(0) = b$ vi får $x_2(t) = be^t$. Det sista systemet har formen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

där

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet till matrisen $\mathbf{B}$ är

$$p_{\mathbf{B}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Det har nollställen $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$. Egenvektor som stämmer till det första nollstället $\lambda_1 = 1$ är

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och vi får en lösning

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Egenvektor som stämmer till det andra nollstället $\lambda_2 = -1$ är

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och vi får andra lösningen

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Alltså

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ -C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Insättning av begynnelsevilllkor $x_1(0) = a$ och $x_3(0) = c$ ger $C_1 = (a-c)/2$ och $C_2 = (a+c)/2$. Vi får alltså

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} e^t + \frac{a+c}{2} e^{-t} \\ b e^t \\ \frac{c-a}{2} e^t + \frac{a+c}{2} e^{-t} \end{pmatrix}.$$

4 (a) Bestäm för $n = 3, 4, \ldots$ funktionen $y_n(t)$ som uppfyller begynnelsevärdesproblemet

$$y_n''(t) + 4y_n(t) = f_n(t), \quad y_n(0) = y_n'(0) = 0,$$

där

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \le \pi; \\ n \sin\big(n(t-\pi)\big), & \pi < t \le \pi + \pi/n; \\ 0, & t > \pi + \pi/n. \end{cases}$$

(b) Bestäm gränsvärde $y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t)$. Funktionen $y(t)$ uppfyller då differentialekvationen $y'' + 4y = g(t)$ med något högerled $g(t)$. Bestäm $g(t)$.

Lösning: **(a)** Vi tillämpar Laplacetransform till både sidor av ekvationen. För att bestämma Laplacetransform av högerledet, skriver vi om det på formen

$$f_n(t) = n \sin\big(n(t-\pi)\big) \cdot (u_\pi(t) - u_{\pi+\pi/n}(t)) = n \sin\big(n(t-\pi)\big) \cdot u_\pi(t) - n \sin\big(n(t-\pi-\pi/n) + n\cdot\pi/n\big) u_{\pi+\pi/n}(t) =$$
$$= n \sin\big(n(t-\pi)\big) \cdot u_\pi(t) + n \sin\big(n(t-\pi-\pi/n)\big) u_{\pi+\pi/n}(t).$$

Här u_a är Heavisides enhetstegsfunktion. Vi har då

$$\mathcal{L}\{f_n\}(s) = n e^{-\pi s} \frac{n}{s^2+n^2} + n e^{-(\pi + \frac{\pi}{n})s} \frac{n}{s^2+n^2}.$$

Om $Y_n(s)$ betecknar Laplacetransformen av lösningen y_n, då hela ekvationen efter Laplacetransformering blir

$$(s^2+4) Y_n(s) = \frac{n^2 e^{-\pi s}}{s^2+n^2} + \frac{n^2 e^{-(\pi+\frac{\pi}{n})s}}{s^2+n^2}.$$

Vi hittar

$$Y_n(s) = \frac{n^2 e^{-\pi s}}{(s^2+4)(s^2+n^2)} + \frac{n^2 e^{-(\pi+\frac{\pi}{n})s}}{(s^2+4)(s^2+n^2)}.$$

Nu det är dags att söka partiellbråkuppdelning av rationella bråket

$$\frac{n^2}{(s^2+4)(s^2+n^2)}.$$

Eftersom det beror bara på s^2, det är naturligt att söka uppdelningen av enklare bråket

$$\frac{n^2}{(z+4)(z+n^2)} = \frac{\frac{n^2}{n^2-4}}{z+4} - \frac{\frac{n^2}{n^2-4}}{z+n^2}$$

och sedan sätta in $z = s^2$. Alltså

$$Y_n(s) = \frac{n^2}{n^2-4}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+n^2} + \frac{e^{-(\pi+\pi/n)s}}{s^2+4} - \frac{e^{-(\pi+\pi/n)s}}{s^2+n^2}\right].$$

Vi tittar i tabellen och kommer fram till

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \\ &= \frac{n^2}{n^2-4}\left[\frac{1}{2}u_\pi(t)\sin\big(2(t-\pi)\big) - \frac{1}{n}u_\pi(t)\sin\big(n(t-\pi)\big) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}u_{\pi+\pi/n}(t)\sin\big(2(t-\pi-\pi/n)\big) - \frac{1}{n}u_{\pi+\pi/n}(t)\sin\big(n(t-\pi-\pi/n)\big)\right] = \\ &= \frac{n^2}{n^2-4}\left[\frac{1}{2}u_\pi(t)\sin(2t) + \frac{1}{2}u_{\pi+\pi/n}\sin(2t-2\pi/n) - \frac{1}{n}(u_\pi(t) - u_{\pi+\pi/n}(t))\sin\big(n(t-\pi)\big)\right]. \end{aligned}$$

(b) Från den sista formel för Y_n ser man lätt att

$$Y(s) = \lim_{n\to\infty} Y_n(s) = \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}$$

vilket ger

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = u_\pi(t)\sin(2t).$$

(Det går bra också att komma till denna formel direkt från formel för y_n). Funktionen $Y(s)$ uppfyller den algebraiska ekvationen

$$(s^2+4)Y(s) = 2e^{-\pi s}$$

som överenstämmer till differentialekvationen för y

$$y'' + 4y = \delta(t-\pi),$$

där δ är Diraks deltafunktion.

5. Bestäm för det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2xy; \\ y' = 1 - x^2 + y^2. \end{cases}$$

de kritiska punkter och undersök dem med avseende på fasporträtt och stabilitetsegenskaper. Om lineariseringsmetoden ger inget svar, undersök systemet genom att hitta ekvationen för banorna. (*Ledning*: beräkna $\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x}\right)$ längs systemets banor).

Lösning: Vi söker först kritiska punkter till systemet d v s vi måste lösa det algebraiska systemet

$$\begin{cases} 2xy = 0\ ; \\ 1 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Från den första ekvationen får vi antingen $x = 0$ eller $y = 0$. Insättning av $x = 0$ till den andra ekvationen ger inga rötter medan insättning av $y = 0$ ger $x = \pm 1$. Alltså vi hittar två kritiska punkter: $(-1, 0)$ och $(1, 0)$.

Vi försöker först undersöka dem med lineariseringsmetod. Den Jakobianska matrisen till systemet är

$$\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}.$$

För punkten $(-1,0)$ matrisen blir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Dem stämmer för ett centrum för det lineariserade systemet, men det ger oss inget svar för icke-linära ursprungliga systemet. Samma förhållande gäller också för den andra kritiska punkten $(1,0)$.

För att undersöka systemets banor, betraktar vi differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{1 - x^2 + y^2}{2xy}.$$

För att lösa den, uttnyttjar vi ledning. Vi har då

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{2y\frac{dy}{dx}\cdot x - y^2}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - 1.$$

Integrering ger oss

$$\frac{y^2}{x} = -\frac{1}{x} - x + C$$

eller

$$y^2 = -1 - x^2 + Cx$$

eller

$$y^2 + (x - C/2)^2 = C^2/4 - 1.$$

För varje C (med $|C| \geq 2$), denna ekvation definerar en cirkel i planet (med centrum i punkt $(C/2, 0)$ och radie $\sqrt{C^2/4 - 1}$) och vi kan avgöra att vi har ett centrum för både kritiska punkter även för icke-linära systemet.

6. För ekvationen

$$x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0$$

bestäm någon icke-trivial lösning i form av potensserie nära singulära punkten $x_0 = 0$. Ange seriens konvergensintervall.

Lösning: Vi skriver om ekvationen först:

$$y'' + \frac{3}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x(x-1)}y = 0.$$

Vi ser att funktioner

$$xp(x) = \frac{3}{x-1} \quad \text{och} \quad x^2q(x) = \frac{-2x}{x-1}$$

har inga singulariteter i punkt $x_0 = 0$. Det betyder att vi har $x_0 = 0$ som en reguljär singuljär punkt. Då det finns en lösning i form av potensserie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Vi väljer r som den största rot av indicialekvation. Vi har $p_0 = -3$, $q_0 = 0$ och indicialekvationen blir

$$r(r-1) - 3r = 0.$$

Den har rötter $r_1 = 4$ och $r_2 = 0$. För att bestämma konvergensradie för losningen, vi tittar på $xp(x)$ och $x^2q(x)$ igen. Både funktionerna har singularitet i punkt $x = 1$, vilket medför att konvergensradie för potensserier för både funktioner är 1 och serie för lösningen har samma konvergensradie. (Konvergensintervallen då blir $(-1, 1)$).

Nu söker vi lösningen. Vi har

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4};$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4) a_n x^{n+3};$$

$$xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+4)(n+3) x^{n+3};$$

och

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+4)(n+3) x^{n+4}.$$

Vi återför den andra och den tredje summa på den formen så att vi summerar termer med x^{n+4}:

$$y'(x) = 4a_0 x^3 + \sum_{m=0}^{\infty} (m+5) a_{m+1} x^{m+4}$$

och

$$xy''(x) = 12a_0 x^3 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+5)(m+4) x^{m+4}.$$

Hela ekvationen då blir

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+4)(n+3) x^{n+4}}_{x^2 y''(x)} \underbrace{-12a_0 x^3 - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+5)(n+4) x^{n+4}}_{-xy''(x)} +$$

$$\underbrace{+12a_0 x^3 + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+5) a_{n+1} x^{n+4}}_{3y'(x)} \underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+4}}_{-2y(x)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n^2 + 7n + 10) a_n - (n^2 + 6n + 5) a_{n+1}\big) x^{n+4} = 0.$$

Alla koefficienter måste vara 0 och vi får

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 7n + 10}{n^2 + 6n + 5} a_n = \frac{n+2}{n+1} a_n.$$

Vi väljer $a_0 = 1$ och vi har

$$a_1 = \frac{2}{1}; \quad a_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3; \quad a_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4; \; \ldots \; a_n = n + 1.$$

Alltså lösningen blir

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+4} = \frac{x^4}{(1-x)^2}.$$