Lösningsförslag till tentamen
i Differentialekvationer och transformer II del I
den 22 augusti 2003

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 - x^2 y' \,; \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Ange lösningens definitionsintervall.

Lösning: Ekvationen kan omskrivas till

$$y'(x + x^2) = y^2 - y.$$

Det är en ekvation med separabla variabler som omskrivas till

$$\frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Integrering av både sidor ger

$$\log\left|\frac{y-1}{y}\right| = C + \log\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

eller

$$1 - \frac{1}{y} = \frac{C_1 x}{x+1},$$

vilket ger

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{C_1 x}{x+1} = \frac{(1-C_1)x + 1}{x+1}$$

och

$$y = \frac{x+1}{(1-C_1)x+1}.$$

Insättning av begynnelsevillkor $x = 1$ och $y = -1$ ger $C_1 = 4$ och

$$y = \frac{x+1}{1-3x}.$$

Denna funktion är definerad om $x \neq 1/3$ d v s om $x \in (-\infty, 1/3)$ eller $x \in (1/3, \infty)$.Vi väljer den interval som innehåller begynnelsevärdet $x = 1$ d v s $x \in (1/3, +\infty)$.

2. Ekvationen

$$(x^2 \log x) \cdot y''(x) - xy'(x) + y(x) = f(x)\ ,\ \ x > 0$$

har lösningen $y = x$ om $f = 0$. Lös ekvationen om $f(x) = 2x^2 \log^2 x$.

Lösning: Vi använder oss av reduktion av ordning metod d v s att vi söker lösningar till den inhomogena ekvationen i form

$$y(x) = xz(x)$$

med en ny obekant funktion z. Insättning till ekvationen ger

$$z'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x\log x}\right) z' = 2\frac{\log x}{x}.$$

Nu inför vi en ny obekant funktion $u = z'$ och vi får

$$u' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x\log x}\right) u = 2\frac{\log x}{x}.$$

Det är en linär ekvation. Den integrerande faktorn till den är

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x\log x}\right) dx\right) = \exp(2\log x - \log\log x) = \frac{x^2}{\log x}.$$

Efter multiplicering med den ekvationen blir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\log x}\cdot u(x)\right) = 2x.$$

Integrering ger

$$\frac{x^2}{\log x}u(x) = x^2 + C$$

eller

$$z' = u(x) = \log x + \frac{C\log x}{x^2}.$$

Integrering en gång till ger

$$z(x) = x(\log x - 1) + C\left(-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right) + C_1.$$

Alltså lösningen är

$$y(x) = x^2(\log x - 1) + C_2(1 + \log x) + C_1 x.$$

3. För det linära systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bestäm den allmänna lösningen. Ange även vilken typ av fasporträtt systemet har nära origo. Är origo en stabil eller instabil jämviktspunkt?

Lösning: Det karakteristiska polynomet till matrisen $\mathbf{A}$ är

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Det har rötter

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Vi tar (t ex) $\lambda = 2 + i$ och söker först den komplexa lösningen i form

$$x(t) = e^{(2+i)t}\cdot\xi,$$

där ξ är en egenvektor som överensstämmer till $\lambda = 2 + i$. Om $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, vi får system

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0,$$

vilket ger

$$\xi_2 = (1+i)\xi_1.$$

Vi har (t ex)

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

och vi får lösningen

$$\mathbf{x}(t) = e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Dess reel och imaginär delar ger oss två linärt oberoende reela lösningar:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1\cos t + C_2\sin t \\ (C_1+C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{pmatrix}.$$

Komplexa egenvärden $\lambda = 2 \pm i$ med positiv reeldel överenstämmer till fasporträtt i typ av instabil spiral.

4. Ett elektriskt filter transformerar insignalen $x(t)$ till utsignalen $y(t)$ enligt regeln

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

där

$$g(\tau) = \begin{cases} \sin\pi\tau, & 0 \leq \tau \leq 2; \\ 0, & \tau > 2. \end{cases}$$

Bestäm utsignalen $y(t)$ om insignalen $x(t)$ är en oändlig följd av pulssignaler av enhetsstorlek skilda med enhetstidsintervall (d v s $x(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \dots$).

Lösning: Vi observerar att funktionen y är faltningen av funktionerna g och x. Då för Laplacetransformen har man

$$Y(s) = G(s)X(s).$$

För att hitta $G(s)$ skriver vi om

$$g(t) = (1 - u_2(t))\sin\pi t = \sin\pi t - u_2(t)\sin\pi(t-2)$$

(där u_2 är Heavisides enhetstegsfunktion) och tillämpar translationsatser:

$$G(s) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} - e^{-2s}\frac{\pi}{s^2+\pi^2} = \frac{\pi(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2}.$$

Vi hittar också

$$X(s) = 1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots = \frac{1}{1-e^{-s}}.$$

Alltså ,

$$Y(s) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-s}} = \frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}.$$

Vi tillämpar inverse Laplacetransform och vi hittar

$$y(t) = \sin \pi t + u_1(t) \sin \pi(t-1) = (1-u_1(t)) \sin \pi t = \begin{cases} \sin \pi t, \ 0 \le t \le 1; \\ 0, \ t > 1. \end{cases}$$

5. Betralkta det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2 + y - x^2, \\ y' = 2x(x-y). \end{cases}$$

(a) (0.5p) Bestäm systemets kritiska punkter.

(b) (2.5p) Undersök dessa genom linearisering av systemet. För varje kritisk punkt ange typ av fasporträtt samt stabilitetsegenskaper.

Lösning: Vi söker först de kritiska punkter. Vi har systemet

$$\begin{cases} 2 + y - x^2 = 0; \\ 2x(x-y) = 0. \end{cases}$$

Från den andra ekvationen får vi $x = 0$ eller $x = y$. I fallet $x = 0$ får vi $2 + y = 0$ vilket ger kritisk punkt $(0, -2)$. I fallet $x = y$ får vi $2 + x - x^2 = 0$ vilket ger kritiska punkter $(-1, -1)$ och $(2, 2)$. Den jakobianska matrisen till systemet är

$$A = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 4x - 2y & -2x \end{pmatrix}.$$

För kritisk punkt $(0, -2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är $\lambda = \pm 2$, vilket ger sadel som är alltid instabil.

För punkten $(-1, -1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är $\lambda = 2 \pm i\sqrt{2}$, vilket ger instabil spiral.

Äntligen, för punkten $(2, 2)$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = -6$ vilket ger en stabil nod.

6. Bestäm för ekvationen

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 4(1 - x^2)y(x) = 0$$

någon icke-trivial lösning i form av en potensserie nära den singulära punkten $x_0 = 0$.

Lösning: Vi omskriver ekvationen till

$$y'' + \frac{5}{x} y' + \left(\frac{4}{x^2} - 4 \right) y = 0.$$

Vi har

$$xp(x) = 5$$

och

$$x^2 q(x) = 4 - 4x^2$$

är både reguljära nära $x_0 = 0$ vilket betyder att vi har en reguljär singularitet. Vi har också $p_0 = 5$ och $q_0 = 4$. Indicialekvationen blir då

$$r(r-1) + 5r + 4 = 0$$

eller

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

och vi får en dubbelrot $r_{1,2} = -2$.

Vi söker nu en lösning i form av potensserie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2}.$$

Vi har

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) a_n x^{n-3} \quad \text{och} \quad xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) a_n x^{n-2}.$$

Vi har också

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-3) a_n x^{n-4} \quad \text{och} \quad x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-3) a_n x^{n-2}.$$

Vi omskriver också

$$x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m-2}.$$

Hela ekvationen blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n-2)(n-3) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 5a_n (n-2) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

eller

$$a_1 x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2 a_n - 4a_{n-2} \right) x^{n-2} = 0.$$

Vi får

$$a_1 = 0$$

och

$$a_n = \frac{4}{n^2} a_{n-2}.$$

Då $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$;

$$a_2 = \frac{4}{2^2} a_0; \quad a_4 = \frac{4^2}{(2 \cdot 4)^2} a_0; \ \ldots \ ; \ a_{2l} = \frac{4^l}{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2l)^2} a_0 = \frac{4^l}{2^{2l} \cdot (l!)^2} a_0 = \frac{a_0}{(l!)^2}.$$

Om $a_0 = 1$, vi får

$$a_{2l} = \frac{1}{(l!)^2}.$$

Alltså

$$y(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l-2}}{(l!)^2}.$$