

Institutionen för Matematik, KTH

TENTAMEN, 5B1202, del I
Differentialekvationer och transformering II
Fredagen den 22 augusti 2003, kl 14-00 – 19-00

Hjälpmedel: formelsamlingen BETA.

Instruktioner: Tentamen består av 6 uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 3p. Tentapoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt (betyg 3) krävs 9p, för betyg 4 krävs 13p och för betyg 5 krävs 16p. För full poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 - x^2 y' ; \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Ange lösningens definitionsintervall.

2. Ekvationen

$$(x^2 \log x) \cdot y''(x) - xy'(x) + y(x) = f(x), \quad x > 0$$

har lösningen $y = x$ om $f = 0$. Lös ekvationen om $f(x) = 2x^2 \log^2 x$.

3. För det linära systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bestäm den allmänna lösningen. Ange även vilken typ av fasporträtt systemet har nära origo. Är origo en stabil eller instabil jämviktspunkt?

4. Ett elektriskt filter transformerar insignalen $x(t)$ till utsignalen $y(t)$ enligt regeln

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

där

$$g(\tau) = \begin{cases} \sin \pi\tau, & 0 \leq \tau \leq 2; \\ 0, & \tau > 2. \end{cases}$$

Bestäm utsignalen $y(t)$ om insignalen $x(t)$ är en oändlig följd av pulssignaler av enhetsstorlek skilda med enhetstidsintervall (d v s $x(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \dots$).

5. Betrakta det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2 + y - x^2, \\ y' = 2x(x - y). \end{cases}$$

(a) (0.5p) Bestäm systemets kritiska punkter.

(b) (2.5p) Undersök dessa genom linearisering av systemet. För varje kritisk punkt ange typ av fasporträtt samt stabilitetsegenskaper.

6. Bestäm för ekvationen

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 4(1 - x^2)y(x) = 0$$

någon icke-trivial lösning i form av en potensserie nära den singulära punkten $x_0 = 0$.