KTH Matematik

Tentamen i 5B1202/1 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Måndagen den 15 december 2003 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Karlsson, tel. 790 66 75.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal, radergummi, och "BETA, Mathematics Handbook".

Instruktioner: Tentamen består av 6 uppgifter. Varje fullständigt och korrekt löst uppgift ger 3 poäng. (För poäng krävs väl motiverade lösningar.) Eventuella bonuspoäng adderas. För godkänt krävs totalt minst 9 poäng. Preliminära betygsgränser: för betyg 3 krävs 9p, för betyg 4 krävs 13p och för betyg 5 krävs 16p.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

---

1. (a) Finn den allmänna lösningen $y = y(t)$ till differentialekvationen

$$y' = y$$

och skissera de tre lösningskurvorna (för $t \geq 0$) hörande till begynnelsevillkoren $y(0) = -1, 0, 1$. Gör samma sak med

$$y' = y^2.$$

(2p)

(b) Förklara hur en viss fundamental skillnad mellan (några av) lösningarna till de två ekvationerna illustrerar skillnaden mellan de två existens- och entydighetssatserna för första ordningens differentialekvationer som har diskuterats i kursen. (1p)

2. Ett visst filter av typen

$$y_{\mathrm{ut}}(t) = \int_0^t h(t-u) y_{\mathrm{in}}(u)\, du,$$

där h är en viss funktion, transformerar insignalen $y_{\mathrm{in}} = \cos t$ till utsignalen $y_{\mathrm{ut}} = 1 - \cos t$. Beräkna $y_{\mathrm{ut}}(t)$ om $y_{\mathrm{in}}(t) = e^{-t}$. (3p)

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Skissera fasporträttet av systemet

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

(1p)

(b) Beräkna e^{At}. (1p)

(c) Bestäm den allmänna lösningen till

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man får, om man vill, utnyttja resultatet i (b) (eller anta att det är känt om man inte har lyckats lösa (b)). (1p)

4. Betrakta ekvationen

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0.$$

(a) Antag att man är intresserad av att finna en serielösning i punkten $x = 0$ respektive i punkten $x = 1$. Vilken typ av ansats bör man då göra i respektive fall? (1p)

(b) Bestäm då $\alpha = 2$ de fem första termerna i en serielösning kring $x = 0$. (2p)

(I efterhand kan man notera att lösningen med $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ blir speciellt enkel (0p).)

5. Man vill studera lösningarna $x = x(t)$ till

$$x'' - x^2 - 3x = 0.$$

(a) Skriv om ekvationen på standardmässigt sätt till ett autonomt system av första ordningens differentialekvationer och bestäm de kritiska punkterna. Undersök sedan lineariseringarna av systemet i dessa punkter och dra slutsatser om stabilitet och lokala fasporträtt av ursprungssystemet. (2p)

(b) Finns det någon periodisk lösning $x(t)$ till ekvationen som är positiv (dvs $x(t) > 0$ för alla $t \geq 0$) ? (1p)

6. Differentialekvationen

$$(x^2y^2 + xy)y + (x^2y^2 - 1)x\frac{dy}{dx} = 0$$

har en integrerande faktor som endast beror av xy. Finn alla lösningar $y = y(x)$. (Implicit givna lösningar går bra.) (3p)

Lycka till!