Lösningsförslag till tentamen
i Differentialekvationer och transformer II för T2
tisdagen den 09 mars 2004

1. (a) Visa att differentialekvationen

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$$

är exakt.

(b) Bestäm den lösningen till differentialekvationen som uppfyller begynnelsevillkor $y(1)=0$.

Lösning. (a) V kontrollerar först att ekvationen är exakt. Vi har

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\sqrt{x^2-y}\right]=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\right]=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Derivator sammanfaller vilket visar att ekvationen är exakt.

(b) För att lösa ekvationen, skall vi hitta funktionen $F(x,y)$ sådan att

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\quad\text{och}\quad\frac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}.$$

Från den andra ekvationen får vi

$$F(x,y)=\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}+C(x)$$

och insättningen av denna F till första ekvationen ger

$$2x\sqrt{x^2-y}+C'(x)=2x+2x\sqrt{x^2-y}$$

vilket ger $C(x)=x^2$ och $F(x,y)=\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}+x^2$. Lösningar i implicit form ges då av formel

$$\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}+x^2=C.$$

Insättning av begynnelsevillkor $x=1$, $y=0$ ger $C=\frac{5}{3}$. Alltså vi får

$$\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}+x^2=\frac{5}{3}$$

eller

$$y=x^2-\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x^2\right)^{2/3}.$$

2. Lös differentialekvationen

$$x^2y''-2y=\ln x,\qquad x>0.$$

Lösning. Vi börjar med den homogena ekvationen

$$x^2y'' - 2y = 0.$$

Det är Eulers ekvation och insättning av $y(x) = x^r$ ger den indiciala ekvationen

$$r(r-1) - 2 = 0$$

som har rötter $r_1 = 2$ och $r_2 = -1$. Alltså den homogena lösningen blir

$$y_h(x) = C_1x^{-1} + C_2x^2.$$

För att hitta partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, använder vi oss av variation av parametrar metod. Vi söker partikulärlösningen i form

$$y_p(x) = C_1(x)x^{-1} + C_2(x)x^2.$$

Vi har

$$y_p'(x) = C_1'(x)x^{-1} + C_2'(x)x^2 - C_1(x)x^{-2} + 2C_2(x)x$$

och vi kräver först att

$$C_1'(x)x^{-1} + C_2'(x)x^2 = 0.$$

Då

$$y_p'(x) = -C_1(x)x^{-2} + 2C_2(x)x$$

och

$$y_p''(x) = -C_1'(x)x^{-2} + 2C_2'(x)x + 2C_1(x)x^{-3} + 2C_2(x).$$

Insättning till defferentialekvationen ger

$$-C_1'(x) + 2C_2'(x)x^3 = \ln x.$$

Vi får alltså systemet av algebraiska ekvationer

$$\begin{cases} C_1'(x)x^{-1} + C_2'(x)x^2 = 0 \\ -C_1'(x) + 2C_2'(x)x^3 = \ln x. \end{cases}$$

Vi får

$$C_1'(x) = -\frac{1}{3}\ln x \quad \text{och} \quad C_2'(x) = \frac{\ln x}{3x^3}.$$

Efter integrering vi får

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}x\ln x + \frac{1}{3}x \quad \text{och} \quad C_2(x) = -\frac{\ln x}{6x^2} - \frac{1}{12x^2}.$$

Partikulärlösningen blir

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}.$$

Alltså den allmänna lösningen är

$$y(x) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + C_1x^{-1} + C_2x^2.$$

3. Lös systemet av differentiala ekvationer

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}; \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$$

Lösning. Först skriver vi om systemet på matrisform

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 4e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med det homogena systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Det karakteristiska polynomet till $\mathbf{A}$ är

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

Det har två komplexa rötter $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Vi tar (t ex) $\lambda = 2i$ och söker motsvarande komplexa lösningen. Om

$$\xi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

är egenvektor som stämmer till egenvärden $\lambda = 2i$, då får vi systemet

$$\begin{cases} (2-2i)a - 4b = 0, \\ 2a + (-2-2i)b = 0 \end{cases}$$

för a och b. Vi hittar (t ex) $a = 1 + i$ och $b = 1$ och vi får

$$\xi = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger den komplexa lösningen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t + i(\cos 2t + \sin 2t) \\ \cos 2t + i \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Om vi tar reel och imaginär delar av den, får vi två reela lösningar

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Den allmänna homogena lösningen är deras linjär kombination.

För att hitta någon partikulärlösning, använder vi oss av ansatsmetod. Vi söker den i form

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Insättningen av den till ekvationen ger

$$\begin{pmatrix} -2c \\ -2d \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 2c - 4d + 4 \\ 2c - 2d \end{pmatrix} e^{-2t}$$

eller

$$\begin{cases} -4c + 4d = 4 \\ 2c = 0 \end{cases}$$

vilket ger $c = 0$, $d = 1$.

Alltså den allmänna lösningen blir

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

4. (a) Bestäm för $n = 1, 2, \ldots$ funktionen $y_n(t)$ som uppfyller begynnelsevärdesproblemet

$$y_n''(t) + y_n(t) = f_n(t), \quad y_n(0) = 1, \quad y_n'(0) = 0,$$

där

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, \ t \leq \pi; \\ n, \ \pi < t \leq \pi + \pi/n; \\ 0, \ \pi + \pi/n < t. \end{cases}$$

(b) Bestäm gränsvärdet $y(t) = \lim_{n \to +\infty} y_n(t)$. Funktionen $y(t)$ uppfyller då differentialekvationen $y'' + y = g(t)$ med något högerled $g(t)$. Bestäm $g(t)$.

Lösning.

(a) Vi använder oss av Laplacetransform. Först kan man skriva om högerledet av ekvationen på formen

$$f_n(t) = n(u_\pi(t) - u_{\pi+\pi/n}(t)),$$

där u_a är Heavisides enhetstegsfunktion. Laplacetransform av den är

$$F_n(s) = \frac{ne^{-\pi s}}{s} - \frac{ne^{-(\pi+\pi/n)s}}{s}.$$

Om vi betecknar Laplacetransform av y_n med $Y_n(s)$, då ekvationen efter Laplacetransform blir

$$s^2 Y_n(s) - s y_n(0) - y_n'(0) + Y_n(s) = F_n(s)$$

eller

$$(s^2+1)Y_n(s) - s = \frac{ne^{-\pi s}}{s} - \frac{ne^{-(\pi+\pi/n)s}}{s}.$$

Vi får då

$$Y_n(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{ne^{-\pi s}}{s(s^2+1)} - \frac{ne^{-(\pi+\pi/n)s}}{s(s^2+1)}.$$

Med hjälp av partielbråkuppdelningen

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

får vi

$$Y_n(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{ne^{-\pi s}}{s} - \frac{ne^{-\pi s}s}{s^2+1} - \frac{ne^{-(\pi+\pi/n)s}}{s} + \frac{ne^{-(\pi+\pi/n)s}s}{s^2+1}.$$

Efter inverse Laplacetransform får vi

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \cos t + n(u_\pi(t) - u_{\pi+\pi/n}(t)) + n\cos(t-\pi-\pi/n)u_{\pi+\pi/n}(t) - n\cos(t-\pi)u_\pi(t) = \\ &= \cos t + n(u_\pi(t) - u_{\pi+\pi/n}(t)) - n\cos(t-\pi/n)u_{\pi+\pi/n}(t) + n\cos t\, u_\pi(t). \end{aligned}$$

(b) Vi hittar först gränsvärdet för Y_n. Vi har

$$\begin{aligned} Y(s) &= \lim_{n\to+\infty} Y_n(s) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{ne^{-\pi s}}{s(s^2+1)} - \frac{ne^{-(\pi+\pi/n)s}}{s(s^2+1)}\right) = \\ &= \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s(s^2+1)}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-\pi s(1+1/n)} - e^{-\pi s}}{1/n}\right) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s(s^2+1)}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\pi s(1+h)} - e^{-\pi s}}{h} = \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{\pi e^{-\pi s}}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Det ger

$$y(t) = \cos t + \pi u_\pi(t)\sin(t-\pi) = \cos t - \pi u_\pi(t)\sin t.$$

Eftersom

$$s^2Y(s) - sy(0) + Y(s) = \pi e^{-\pi s},$$

får vi

$$y''(t) + y(t) = \pi\delta(t-\pi).$$

5. Det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2y; \\ y' = 1 - x - y^2 \end{cases}$$

har en kritisk punkt $(1, 0)$.

(a) Linearisera systemet nära den punkten samt bestäm vilken typ av fasporträtt har det lineariserade systemet.

(b) Bestäm även karaktär av fasporträtt nära kritiska punkten för det ursprungliga icke-linjära systemet (*Ledning*: för att hitta ekvationen för banor, inför en ny obekant funktion $z = y^2$ och undersök $\dfrac{dz}{dx}$).

Lösning.

(a) Den Jakobianska matrisen till högerledet av systemet är

$$\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2y \end{pmatrix}.$$

För den kritiska punkten $(1, 0)$ får vi matrisen av det lineariserade systemet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den har karakteristiska polynomet $\lambda^2 + 2$ och egenvärdena $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$. Sådana egenvärdena stämmer till centrum för det lineariserade systemet.

(b) Tyvärr, det säjer ingenting för ursprungliga icke-linjära systemet. För att bestämma karaktär av den kritiska punkten, skall man undersöka banor. Vi hittar från ursprungliga systemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{1 - x - y^2}{2y}.$$

Om $z = y^2$, då får vi

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} = 1 - x - y^2 = 1 - x - z.$$

Det är en enkel linjär differentialekvation av första ordningen. Den har lösningen $z(x) = 2 - x + Ce^{-x}$ vilket ger ekvation för banor

$$y^2 = 2 - x - Ce^{-x}.$$

Om man skisserar först kurvor $z = 2 - x + Ce^{-x}$ och sedan kommer till kurvor $y^2 = 2 - x - Ce^{-x}$, då ser man att de sista kurvorna är slutna banor kring punkten $(1, 0)$ vilket ger oss centrum även för icke-linjära systemet.

6. För differentialekvationen

$$2x^2y''(x) + 3xy'(x) + (x-1)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

bestäm samtliga lösningar $y(x)$ i form av en potensserie som uppfyller

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0.$$

Det räcker om du bestämmer en rekursionsformel för seriens koefficienter samt anger seriens fyra första termer.

Lösning. Först skriver vi om ekvationen på formen

$$y'' + \frac{3}{2x}y' + \frac{x-1}{2x^2}y = 0.$$

Vi har

$$p(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{och} \quad xp(x) = \frac{3}{2}.$$

Det är en reguljär funktion. Dessutom,

$$q(x) = \frac{x-1}{2x^2} \quad \text{och} \quad x^2 q(x) = \frac{x-1}{2}$$

som är också en reguljär funktion. Vi hittar också

$$p_0 = \frac{3}{2} \quad \text{och} \quad q_0 = -\frac{1}{2}$$

vilket ger oss indicialekvation

$$r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

som har rötter $r_1 = \dfrac{1}{2}$ och $r_2 = -1$. Eftersom $r_1 - r_2$ är icke-hel tal, vi har två linjärt oberoende lösningar i form av potensserier:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1/2} = \sqrt{x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

och

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$$

med $a_0 \neq 0$ och $b_0 \neq 0$. Det är klart att

$$\lim_{x\to 0} y_1(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0} y_2(x) = \infty.$$

Dessutom, för allmänna lösningen i form

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

det gäller att

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \infty \quad \text{om} \quad C_2 \neq 0$$

och

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0 \quad \text{om} \quad C_2 = 0.$$

Det visar att det räcker att hitta bara lösningen $y_1(x)$.

Vi har nu

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1/2}; \\
xy_1'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+1/2) x^{n+1/2}; \\
x^2 y_1''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n^2-1/4) x^{n+1/2}; \\
\text{och} \quad xy_1(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3/2} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+1/2}.
\end{aligned}
$$

Insättningen till ekvationen ger

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n (n^2-1/4) x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 3a_n (n+1/2) x^{n+1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1/2} = 0
$$

eller

$$
-\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_0 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((2n^2 - \frac{1}{2})a_n + (3n + \frac{3}{2})a_n + a_{n-1} - a_n \Big) x^{n+1/2} = 0.
$$

Vi får från det

$$
a_n(2n^2+3n) = -a_{n-1},
$$

vilket ger rekursionsformeln

$$
a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n^2+3n}, \quad n = 1, 2, \ldots
$$

Om vi väljer (t ex) $a_0 = 1$, då får vi

$$
a_1 = -\frac{1}{5}; \quad a_2 = \frac{1}{70}; \quad a_3 = -\frac{1}{1890}
$$

och lösningen blir

$$
y_1(x) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{70}x^2 - \frac{1}{1890}x^3 + \ldots \right).
$$