Institutionen för Matematik, KTH

TENTAMEN, 5B1202, del I
Differentialekvationer och transformer II för T2
Tisdagen den 09 mars 2004, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: formelsamlingen BETA.

Instruktioner: Tentamen består av 6 uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 3p. Tentapoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt (betyg 3) krävs 9p, för betyg 4 krävs 13p och för betyg 5 krävs 16p. För full poäng krävs väl motiverade lösningar.

1. (a) (**1p**) Visa att differentialekvationen

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$$

är exakt.
(b) (**2p**) Bestäm den lösningen till differentialekvationen som uppfyller begynnelsevillkor $y(1)=0$.

2. Lös differentialekvationen

$$x^2y''-2y=\ln x, \qquad x>0.$$

3. Lös systemet av differentiala ekvationer

$$\begin{cases} x'=2x-4y+4e^{-2t}; \\ y'=2x-2y. \end{cases}$$

4. (a) (**3p**) Bestäm för $n=1,2,\ldots$ funktionen $y_n(t)$ som uppfyller begynnelsevärdesproblemet

$$y_n''(t)+y_n(t)=f_n(t), \quad y_n(0)=1, \quad y_n'(0)=0,$$

där

$$f_n(t)=\begin{cases} 0,\ t\le\pi; \\ n,\ \pi<t\le\pi+\pi/n; \\ 0,\ \pi+\pi/n<t. \end{cases}$$

(b) (inte obligatorisk uppgift men den kan ge **1** extra poäng). Bestäm gränsvärdet $y(t)=\lim_{n\to+\infty}y_n(t)$. Funktionen $y(t)$ uppfyller då differentialekvationen $y''+y=g(t)$ med något högerled $g(t)$. Bestäm $g(t)$.

5. Det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2y; \\ y' = 1 - x - y^2 \end{cases}$$

har en kritisk punkt $(1, 0)$.

(a) (**1p**) Linearisera systemet nära den punkten samt bestäm vilken typ av fasporträtt har det lineariserade systemet.

(b) (**2p**) Bestäm även karaktär av fasporträtt nära kritiska punkten för det ursprungliga icke-linjära systemet (*Ledning*: för att hitta ekvationen för banor, inför en ny obekant funktion $z = y^2$ och undersök $\frac{dz}{dx}$).

6. För differentialekvationen

$$2x^2 y''(x) + 3xy'(x) + (x - 1)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

bestäm samtliga lösningar $y(x)$ i form av en potensserie som uppfyller

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0.$$

Det räcker om du bestämmer en rekursionsformel för seriens koefficienter samt anger seriens fyra första termer.

LYCKA TILL!