Lösningsförslag till Tentamen i 5B1202/1 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Måndagen den 13 april 2004 kl. 14.00–19.00

---

1. Separera variablerna genom att först flytta över $16x$, $3y^2y' = 2xy^3 - 16x$ och sedan

$$\frac{3y^2y'}{y^3-8} = 2x,$$

för $y \neq 2$. Integrering ger

$$ln|y^3 - 8| = x^2 + C$$

så att $y^3 - 8 = De^{x^2}$ och slutligen svaret (notera att y(x)=2 löser ekvationen):

$$y(x) = (8 + De^{x^2})^{\frac{1}{3}},$$

där D är en godtycklig konstant. b. Den enda lösningen som är begränsad är uppenbart $y(x) = 2$ dvs då $D = 0$.

2. a. Vi finner egenvärden och egenvektorer: systemmatrisen A har den karaktäristiska ekvationen

$$0 = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2.$$

Så systemet har ett dubbelt egenvärde $\lambda = 1$. Motsvarande egenvektor ges av

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

till exempel $\xi = (v_1, v_2)^t = (2,1)^t$. Ekvationssytemet har alltså en instabil oegentlig nod i origo.

b. Den kritiska punkten ges av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs punkten $(x_1, x_2) = (-2, 0)$. Se bokens Fig. 9.1.4 för ett fasporträtt av en oegentlig nod. Men i detta fall är den placerad i $(-2, 0)$. Den generaliserade egenvektorn $\eta = (w_1, w_2)$ som ges av

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

t ex $\eta = (1, 0)^t$.

3. Vi använder oss av reduktion av ordning metod d v s söker vi lösningen till inhomogena ekvationen i form

$$y(x) = z(x)e^x$$

med en ny obekant funktion $z(x)$. Vi har då

$$y'(x) = z'(x)e^x + z(x)e^x;$$

$$y''(x) = z''(x)e^x + 2z'(x)e^x + z(x)e^x$$

och insättningen i ekvationen ger oss

$$xz''(x) - z'(x) = 3x^2.$$

Om $u(x) = z'(x)$, då får vi ekvationen av första ordningen

$$u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = 3x.$$

Integrerande faktorn till den är

$$\mu(x) = \exp(-\int \frac{dx}{x}) = \exp(-\ln x) = \frac{1}{x}$$

och efter multiplication med den ekvationen blir

$$\frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2} = 3$$

eller

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{x}\right) = 3.$$

Integrering ger

$$\frac{u(x)}{x} = 3x + C$$

eller

$$u(x) = 3x^2 + Cx.$$

Vi hittar sedan

$$z(x) = x^3 + \frac{1}{2}Cx^2 + D$$

och kommer till svar

$$y(x) = \left(x^3 + \tilde{C}x^2 + D\right)e^x.$$

4. Skriv ekvationen som $y'' + 3y' + 2y = u_1(t) - u_0(t)$, där u_c är Heavisides stegfunktion som i boken. Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) - s - 1 + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s}$$

eller förenklat

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)(s+2)}$$

Inverstransformen av det första bråket är lika med (L28,L29)

$$\frac{2e^{-2t} - e^{-t}}{1} + 4\frac{-e^{-2t} + e^{-t}}{1} = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

och med hjälp av L30 har vi

$$L^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\} = \frac{1-2e^{-t}+e^{-2t}}{(-1)(-1)2} = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2} =: h(t)$$

Detta ger slutligen att

$$y(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t} - h(t) + u(t-1)h(t-1).$$

5. Vi söker först kritiska punkter. Då får vi systemet

$$\begin{cases} x(1-y+x) = 0; \\ -x-y = 0. \end{cases}$$

Det har två lösningar: $(0,0)$ och $(-1/2, 1/2)$ som är kritiska punkter till systemet.

Den Jakobianska matrisen till systemet är

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y+2x & -x \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

För den första kritiska punkten $(0,0)$ får vi matris av det lineariserade systemet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den har egevärdena ± 1 som stämmer till fasporträtt av typ sadel. För att rita den, skall man veta också egenvektorer. För $\lambda_1 = 1$, får vi egenvektor

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ger oss "instabil riktningen" för sadelpunkt och för $\lambda_2 = -1$ får vi egenvektor

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ger oss "stabil riktningen" längs y-axel för sadelpunkt.

För den andra kritiska punkten $(-1/2, 1/2)$, får vi matrs av lineariserade systemet

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärdena $\lambda_{1,2} = -3/4 \pm i\sqrt{7}/4$ som stämmer till stabil spiral. För att skissera fasporträtt nära den kritiska punkten, skall man veta rotationsriktningen av spiralen. Vi väljer t ex punkten $(-1/2+\epsilon, 1/2)$ nära den kritiska punkten (där ϵ är något litet positivt tal) och vi får i den punkten $x' = \epsilon(-1/2+\epsilon) < 0$ och $y' = -\epsilon < 0$. Det ger oss medsols rotationsriktningen.

6. Vi skriver om ekvationen på formen

$$u''(x) + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) u'(x) - \frac{3}{2x} u(x) = 0.$$

Vi har då

$$xp(x) = (x + 1/2) \quad \text{och} \quad x^2 q(x) = -3x/2.$$

Det är reguljära funktioner vilket visar att $x_0 = 0$ är en reguljär singuljär punkt. Vi får också $p_0 = 1/2$ och $q_0 = 0$ vilket ger indicialekvationen

$$r(r-1) + r/2 = 0$$

som har två rötter $r_1 = 1/2$ och $r_2 = 0$. Vi har $r_1 - r_2 = 1/2$ som är icke-hel tal och det visar att det finns två linjärt oberoende lösningar i form av potensserie

$$u_{1,2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_{1,2}) x^{n+r_{1,2}}.$$

Nu sätter vi lösningen i form av potensserie

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

till ekvationen. Vi får

$$2xu''(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} = [\text{ byte } \ n = m+1] =$$
$$= \sum_{m=-1}^{\infty} 2a_{m+1}(m+r+1)(m+r)x^{m+r} =$$
$$= 2a_0 r(r-1)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1}(n+r+1)(n+r)x^{n+r}; \quad (1)$$

$$2xu'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r};$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} = \Big[\text{byte } \ n = m+1\Big] = \sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1}(m+r+1)x^{m+r} =$$
$$= a_0 r x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)x^{n+r}. \quad (2)$$

Alltihop ger oss

$$a_0\left(2r(r-1)+r\right)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(2a_{n+1}(n+r+1)(n+r) + 2a_n(n+r) + a_{n+1}(n+r+1) - 3a_n\Big)x^{n+r} = 0.$$

Den första termen blir 0 p g a val av $r = 1/2$ eller $r = 0$. Den summa blir 0 om alla koefficienter är 0 och vi får rekursionsformel

$$a_{n+1} = -a_n \frac{2n + 2r - 3}{(n + r + 1)(2n + 2r + 1)}.$$

Om $r = 1/2$ då får man från den

$$a_1 = \frac{2}{3} a_0, \quad a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

och vi får en lösning

$$u_1(x) = a_0 \left(x^{1/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} \right)$$

som är svar till uppgiften. Om $r = 0$, då rekursionsformel ger koefficienter av en oändlig serie för lösningen u_2.