Institutionen för Matematik, KTH
Per Sjölin

Lösningsförslag till
TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Lördagen den 18 december 2004, kl 14.00–19.00

1. Om $\mu(x)$ är en integererande faktor, gäller

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(3x+2y^2)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)2xy] \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x)4y = \mu(x)2y + 2xy\mu'(x).$$

Man får $1/x = \mu'/\mu$, som har lösningen $\ln|\mu| = \ln|x| + C$, alltså $|\mu| = e^C|x|$. Välj exempelvis $\mu(x) = x$. Bestäm en funktion F sådan att

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 \quad \text{och} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y \qquad \because \ F(x,y) = x^3 + x^2y^2 + h(y).$$

Det andra villkoret, $\partial F/\partial y = 2x^2y + h'(y) = 2x^2y$, ger $h'(y) = 0$ och $h(y) = C$. Enklast väljs $F(x,y) = x^3 + x^2y^2$. Detta visar att differentialekvationen är ekvivalent med $\mathrm{d}F = 0$ och lösningen ges av sambandet $F(x,y) = C$. Den allmänna lösningen är således $x^3 + x^2y^2 = C$.

2. Karakteristiska ekvationen till

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \tag{1}$$

är $m^2 + 2m + 2 = 0$ med lösningar $m = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$. Detta visar att (1) har två linjärt oberoende lösningar:

$$y_1(x) = e^{-x}\sin x \quad \text{och} \quad y_2(x) = e^{-x}\cos x.$$

Wronskis determinant för dessa lösningar är

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x}\sin x & e^{-x}\cos x \\ e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \end{vmatrix} = -e^{-2x}.$$

Sök partikulärlösningen till (1) på formen $y_p + v_1y_1 + v_2y_2$. Med $R = e^{-x}\sin x$ fås

$$v_1' = -\frac{y_2R}{W} = -\frac{e^{-x}\cos x e^{-x}\sin x}{-e^{-2x}} = \frac{1}{2}\sin 2x$$
$$v_2' = \frac{y_1R}{W} = \frac{e^{-x}\sin x e^{-x}\sin x}{-e^{-2x}} = -\sin^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

Välj exempelvis

$$v_1(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x \quad \text{och} \quad v_2(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x.$$

Partikulärlösningen är

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -\frac{1}{4}\cos 2xe^{-x}\sin x + \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\right)e^{-x}\cos x = \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}(\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x) = \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}\sin x
\end{aligned}$$

och den allmänna lösningen till (1) är

$$y(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + c_1e^{-x}\sin x + c_2e^{-x}\cos x.$$

3. Sök egenvärden till koefficientmatrisen:

$$\begin{vmatrix} 1-m & 9 \\ -4 & 1-m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ger} \quad m^2 - 2m + 37 = 0 \quad \text{och} \quad m = 1 \pm 6i.$$

Egenvärdet $m = 1 + 6i$ ger

$$\begin{cases} [1-(1+6i)]A & +9B = 0 \\ -4A & +[1-(1+6i)]B = 0 \end{cases}$$

och en lösning är $A = -3i, B = 2$. En komplex lösning till systemet är

$$e^{(1+6i)t}\begin{pmatrix} -3i \\ 2 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 3\sin 6t \\ 2\cos 6t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} -3\cos 6t \\ 2\sin 6t \end{pmatrix}.$$

Två linjärt oberoende reella lösningar är därför

$$e^t\begin{pmatrix} 3\sin 6t \\ 2\cos 6t \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad e^t\begin{pmatrix} -3\cos 6t \\ 2\sin 6t \end{pmatrix},$$

och allmänna lösningen kan skrivas

$$\begin{cases} x = e^t(c_1 3\sin 6t - c_2 3\cos 6t) \\ y = e^t(c_1 2\cos 6t - c_2 2\sin 6t) \end{cases}.$$

4. Skriv systemet som

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{cases} F(x,y) = -\tan x + y \\ G(x,y) = \frac{1}{2}x - \sin y \end{cases}.$$

Jacobis matris är

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\tan^2 x & 1 \\ \frac{1}{2} & -\cos y \end{pmatrix}$$

och för $(x, y) = (0, 0)$ fås

$$A = \begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Det lineariserade systemet är

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = \frac{1}{2}x - y \end{cases},$$

och dess egenvärden bestäms ur

$$\begin{vmatrix} -1-m & 1 \\ \frac{1}{2} & -1-m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ger} \quad m^2 + 2m + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{och} \quad m_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} < 0.$$

Eftersom $\operatorname{Re} m_i < 0$, har det lineariserade systemet en asymptotiskt stabil kritisk punkt och det ursprungliga systemet har en stabil och asymptotiskt stabil kritisk punkt i origo.

5. Vi använder transformerna

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{y'\} &= s\mathscr{L}\{y\} - y(0) \\ \mathscr{L}\{y''\} &= s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \\ \mathscr{L}\{y^{(3)}\} &= s^3\mathscr{L}\{y\} - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0). \end{aligned}$$

Termvis Laplacetransformering av differentialekvationen ger

$$\begin{aligned} & (s^3 + s^2 - 9s + 7)\mathscr{L}\{y\} - sy'(0) - y''(0) - y'(0) = \frac{1}{s-2} \\ \Leftrightarrow \quad & (s^3 + s^2 - 9s + 7)\mathscr{L}\{y\} = s + 4 + \frac{1}{s-2} = \frac{s^2 + 2s - 7}{s-2} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Härav följer $y(x) = e^{2x} - e^x$.

6. Ekvationen kan skrivas

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' - \frac{2}{1+x^2}y = 0$$

eller $y'' + Py' + Qy = 0$, där

$$P(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{och} \quad Q(x) = -\frac{2}{1+x^2}.$$

P och Q är analytiska i $x = 0$ och deras potensserier konvergerar för $|x| < 1$. $x = 0$ är alltså en ordinär punkt, och ekvationen har en lösning på formen

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n$$

i intervallet $|x| < 1$. a_0 och a_1 kan väljas godtyckligt och övriga koefficienter kan bestämmas genom insättning i ekvationen. Man får

$$y' = \sum_0^\infty (n+1)a_{n+1}x^n, \qquad y'' = \sum_0^\infty (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,$$

$$2xy' = \sum_0^\infty (n+1)a_{n+1}2x^{n+1} = \sum_1^\infty 2na_nx^n$$

$$\text{och} \quad x^2y'' = \sum_0^\infty (n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2} = \sum_2^\infty (n-1)na_nx^n.$$

Insättning i ekvationen ger

$$\sum_0^\infty (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_2^\infty (n-1)na_nx^n + \sum_1^\infty 2na_nx^n - \sum_0^\infty 2a_nx^n = 0.$$

Koefficienten framför x^n är 0 för alla n, varur följer

$$n = 0 : 2a_2 - 2a_0 = 0 \quad \because\ a_2 = a_0$$

$$n = 1 : 2 \cdot 3a_3 + 2a_1 - 2a_1 = 0 \quad \because\ a_3 = 0$$

$$n \geq 2 : (n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-1)na_n + 2na_n - 2a_n = 0,$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-1)(n+2)a_n = 0 \quad \because\ a_{n+2} = \frac{1-n}{1+n}a_n,\ n \geq 2.$$

Härav följer $a_{2n+1} = 0$ för $n = 1, 2, \ldots$. De första koefficienterna av jämn ordning är

$$a_4 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}a_0, \quad a_6 = -\frac{3}{5}a_4 = \frac{1}{5}a_0, \quad a_8 = -\frac{5}{7}a_6 = -\frac{1}{7}a_0$$

och allmänt gäller

$$a_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}a_0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Ekvationens lösning är således

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1x + a_0\sum_0^\infty (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}x^{2n} = \\ &= a_1x + a_0x\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1} + a_0 = \\ &= a_1x + a_0(1 + x\arctan x) \end{aligned}$$

för $|x| < 1$.

Anmärkning Man övertygar sig lätt om att x löser differentialekvationen. Det går sedan att använda reduktion av ordning: den andra linjärt oberoende lösningen söks på formen $xu(x)$.