KTH Institutionen för Matematik
Avd Matematik, TK januari 2002

TENTAMEN 9/1 2002 FÖR F2 OCH T2 PÅ 5B1202, DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 2.

Förslag till lösningar

1. a) Jämn funktion medför att cosinusserien antar värdet 1 för $t = 0$ och -1 för $t = -1$.

   b) Udda funktion med språng i $t = 0$ medför att sinusserien antar värdet 0 (medelvärdet av höger- och vänstergränsvärdena) för $t = 0$ och $1 = -(-1)$ för $t = -1$.

2. $t^{1/3}$ udda funktion medför att sökt minimum = minimum av $\int_{-1}^{1}(t^{1/3} - bt)^2\,dt$, dvs $a = c = 0$. b bestäms av att $t - bt$ och t är ortogonala på intervallet, dvs $\int_{-1}^{1}(t^{1/3} - bt)t\,dt = 0$, vilket ger $\int_{-1}^{1} t^{4/3}\,dt = b\int_{-1}^{1} t^2\,dt$, så $b = 9/7$.

3. a) Låt $f(t)$ beteckna högerledet i formeln. Dess Fourierkoefficienter $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ blir, med två partialintegrationer, för $n \neq 0$

$$\frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[f'(t)\frac{e^{-int}}{(-in)^2}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)\frac{e^{-int}}{(-in)^2}\,dt.$$

Den första termen = 0 eftersom uttrycket inom parenteserna är en kontinuerlig (!) 2π-periodisk funktion. Då f'' är konstant försvinner också den tredje termen. Mittentermen kan skrivas

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(\pi - t)\frac{e^{-int}}{(-in)^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(\pi/2 - \pi) - \pi/2}{-n^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Man finner att $c_0 = 0$, så F-serien blir

$$\sum_{n\neq 0}\frac{e^{int}}{2n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{int} + e^{-int}}{2n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}.$$

b) $t = 0$ i det givna uttrycket ger $\sum_1^\infty n^{-2} = \pi^2/6$.

c) Parsevals formel i detta fall är $\sum_1^\infty a_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt$ och ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^3 t}{6} + \frac{\pi^2 t^2}{3} - \frac{\pi t^3}{4} + \frac{t^4}{16}\right) dt = \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. Sätt $g(t) = tf'(t)$. Då gäller att $\hat{g}(\omega) = i\Big(i\omega\hat{f}(\omega)\Big)'$. Vi vet att $1/(1+t^2)$ har FT $\pi e^{-|\omega|}$, så

$$\hat{g}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(\omega e^{-|\omega|}) = -(1-|\omega|)e^{-|\omega|}.$$

Eftersom (BETA) $e^{it}g(t)$ har FT $\hat{g}(\omega-1)$ är den sökta Fouriertransformen $-(1-|\omega-1|)e^{-|\omega-1|}$.

5. Multiplicera vänsterledet med e^{-x^2} och fouriertransformera (i x-variabeln, t är en parameter här):

$$\begin{aligned}\left(e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)\right)\widehat{\ }(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\big(e^{-x^2}H_n(x)\big)\widehat{\ }(\omega)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\big((-D)^n e^{-x^2}\big)\widehat{\ }(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(-\mathrm{i}\omega)^n\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}\\ &=e^{-\mathrm{i}\omega t}\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(\omega+2\mathrm{i}t)^2-t^2} = (e^{2tx}e^{-x^2})\widehat{\ }(\omega)e^{-t^2},\end{aligned}$$

vilket erhålles då man först multiplicerar högerledet med e^{-x^2} och sedan fouriertransformerar. Saken är klar!

6. a) Vi skall summera en geometrisk serie: per def. är ju den sökta $Z-$transformen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}.$$

b) Derivatan av $\sum a^n z^{-n}$ är $-\sum a^n z^{-n+1}$, varför $-z\frac{d}{dz}\sum a^n z^{-n} = \sum na^n z^{-n}$ och det sökta uttrycket är

$$-z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

7. a) Upprepning ger $f(t+2\tau) = \alpha^2 f(t)$, $f(t+3\tau) = \alpha^3 f(t)$ osv, $f(t+k\tau) = \alpha^k f(t)$, där k är ett positivt heltal. Med $k = N$ fås $f(t+T) = f(t+N\tau) = \alpha^N f(t) = f(t)$.

   b) Dela upp integralen $\int_0^T f_1(t)\overline{f_2(t)}\,dt$ i integraler över intervallen $(0,\tau)$, $(\tau, 2\tau)$ osv. Vi har

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} f_1(t)\overline{f_2(t)}\,dt = \int_0^{\tau} f_1(x+k\tau)\overline{f_2(x+k\tau)}\,dx = \alpha_1^k\overline{\alpha_2}^k \int_0^{\tau} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx.$$

   Vi visar att $\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_1^k\overline{\alpha_2}^k = 0$. Låt ω vara talet $e^{2\pi i/N}$, den första icke-triviala enhetsroten av ordning N. Då finns positiva och skilda heltal p_1 och p_2 så att $\alpha_\nu = \omega^{p_\nu}$. Vi har $\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_1^k\overline{\alpha_2}^k = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma^k$, där $\gamma = \omega^{p_1-p_2}$. Denna summa är $(1-\gamma^N)/(1-\gamma)$, om $\gamma \neq 1$, vilket är fallet. Då dessutom $\gamma^N = 1$ blir summan $= 0$, som utlovats.