KTH Institutionen för Matematik
Avd Matematik

TENTAMEN PÅ KURSEN 5B1202,
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER, II,
DEL 2, FÖR F OCH T, (3 poäng)
Tisdag den 28 maj 2002, kl. 8.00-13.00.

Tentamen består av 6 uppgifter som vardera ger 3 poäng, totalt 18 poäng.
Bonuspoäng, max 4 stycken, tillgodoräknas på hela tentamen.
För betygen 3, 4 och 5 räcker det att uppnå 9, 13, resp. 16 poäng
Tillåtna hjälpmedel: Endast **BETA**.

LYCKA TILL!

1. Låt
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 2; \\ x - \pi, & 2 < x < \pi. \end{cases}$$
Om f utveckles som en sinusserie, vad konvergerar då serien mot för värde i punkterna $x = -2$, $x = 0$, $x = \pi/2$, och $x = \pi$.

2. a) Beräkna fouriertransformen till
$$f(x) = x \sin(2x) \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$
b) Låt
$$f(x) = \cos(2x) \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$
Beräkna $f * g(x)$.

3. En stång är isolerad i båda ändpunkterna och dess temperatur beskrives av funktionen $u(x,t)$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, som uppfyller differentialekvationen
$$\begin{array}{lll} u_t = 0.1\ u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0; & \\ u(x,0) = 100(1 - \cos^4(x)), & 0 < x < \pi. & \end{array}$$
a)Finn lösningen $u(x,t)$.
b)Vad är värdet på lösningen i ändpunkterna $x = 0$ och $x = \pi$ då $t = 10$.

4. Finn följderna $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ om

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0,$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} y_{n-k} y_k = x_n$$

och $x_0 = 3$, $x_1 = 12$ samt $y_0 > 0$.

5. Konstanterna A, B, C, D och E är valda sådana att integralen

$$\int_{-1}^{1} |\mathrm{e}^{-t} - A - Bt - Ct^2 - Dt^3 - Et^4|^2 dt$$

blir så liten som möjligt. Bestäm värdet på konstanten D.
(**OBS:** det frågas i uppgiften endast efter konstanten D.)

6. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ t - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

a) Skriv upp sinusserien till f.
b) Betrakta differentialekvationen

$$y'' + y = f(t) - \alpha \sin(t), \qquad 0 < t < \pi;$$
där
$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

b)För vilka värden på konstanten α har differentialekvationen någon lösning $y(t)$. Skriv då upp $y(t)$ som en sinusserie.