KTH Institutionen för Matematik
Avd Matematik

TENTAMEN PÅ KURSEN 5B1202,
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER, II,
DEL 2, FÖR F OCH T, (3 poäng)
Torsdag den 9 januari 2003, kl. 14.00-19.00.

Tentamen består av 6 uppgifter som vardera ger 3 poäng, totalt 18 poäng.
Ev. Bonuspoäng, max 4 stycken från vt 2002, tillgodoräknas på hela tentamen.
För betygen 3, 4 och 5 räcker det att uppnå 9, 13, resp. 16 poäng
Tillåtna hjälpmedel: Endast **BETA**.

LYCKA TILL!

1. Låt
$$f(x) = 2 - x, \qquad 0 < x < \pi;$$
Ange - utan att behöva räkna serien - vad sinusserien till f har för värde i punkterna $x = -7\pi$, $x = 6\pi$, och $x = \pi/2$. Ge motivering till svaret.

2. En stång är isolerad i båda ändpunkterna och dess temperatur beskrives av funktionen $u(x,t)$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, som uppfyller differentialekvationen
$$\begin{array}{lll} u_t = 0.4\ u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0; & \\ u(x,0) = 100(\sin(x))^2, & 0 < x < \pi. & \end{array}$$
   (a) Finn lösningen $u(x,t)$.

   (b) Vad är värdet på lösningen i ändpunkterna $x = 0$ och $x = \pi$ då $t = 10$.

3. Bestäm den lösning $y(n)$ till differensekvationen:
$$2y(n+1) + y(n) = x(n+1) + \frac{1}{2}x(n), n \geq 0,$$
som fås om
$$x(n) = n^2 \frac{(-1)^n}{2^n} \text{ och } y(0) = 1.$$

4. (a) Visa att

$$\left\{\cos(n+\frac{1}{2})x\right\}_{n=0}^{\infty}$$

bildar en orogonal mängd p[intervallet $(0,\pi)$ om den inre produkten ges av $(f,g)=\int_0^\pi f(x)g(x)dx$.

(b) Bestäm talen $\{A_n\}_{n=0}^4$ så att integralen

$$I=\int_0^\pi\left(\sin 3x\sin\frac{3x}{2}-\sum_{n=0}^{4}A_n\cos(n+\frac{1}{2})x\right)^2dx$$

blir minimal. Ange även detta min-värde.

5. (a) Finn egenvärderna λ och motsvarande egenfunktioner u till Sturm-Liouville opereatorn L:

$$Lu=u''+u=\lambda u$$

på intervallet $0<x<\pi$ med randvilkoren

$$u(0)=u'(\pi)=0$$

och finn ut om egenfunktionerna är ortogonala.

(b) Finn lösningen till differentialekvationen

$$u''+u=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{\pi}{2};\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

på intervallet $0<x<\pi$ med randvilkoren

$$u(0)=u'(\pi)=0.$$

Svaret kan skrivas på formen av en linjär kombination av egenfunktionerna i uppgift (a).

6. (a) Låt $f(x)$ vara en reel, kontininuerlig och integrerbar funktion påintervallet $-\infty<x<\infty$. Skriv upp definitionen av Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ till funktionen f.
Låt a vara en positiv konstant. Visa vad blir Fouriertransformen-till funktionen $f(ax)$, uttryckt med hjälp av $\hat{f}$. Du måste visa detta utifrån din givna definition av Fourier transformen. (Det räcker alltså inte att referera till en formel i Beta.)

(b) Finn två reella funktioner f och g sådana att

$$g(x)=f(2x)$$

och

$$f*g(x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

(I deluppgift (b) får du hänvisa till Beta)