Matematiska Institutionen
KTH

**Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik för F3 och F1spec, 5B1203, måndagen den 24 maj 2004.**

1. Vi tillämpar metoden med snabb aritmetik. Ringen $Z_{78}$ är isomorf med den direkta produkten $Z_2 \times Z_3 \times Z_{13}$. Om avbildningen $\varphi$ beskriver denna isomorfi gäller att $\varphi(58) = (0, 1, 6)$ och därmed

$$\varphi(58^{299}) = (0^{299}, 1^{299}, 6^{299}) = (0, 1, 6^{300-1}).$$

Enligt Fermats lilla sats gäller i ringen $Z_{13}$ att $6^{12} = 1$. Då $6^{-1} = 11$ i ringen $Z_{13}$ finner vi att

$$\varphi(58^{299}) = (0, 1, 6^{25\cdot 12}6^{-1}) = (0, 1, 11).$$

Vi använder nu kinesiska restsatsen för att bestämma det element $x$ i $Z_{78}$ sådant att $\varphi(x) = (0, 1, 11)$. Enligt lösningsformeln för kinesiska restsatsen gäller att

$$x = a \cdot 3 \cdot 13 + b \cdot 2 \cdot 13 + c \cdot 2 \cdot 3 + n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

för några tal $a$, $b$, $c$ och $n$. Att $x \equiv_2 0$ ger att $a = 0$. Villkoret $x \equiv_3 1$ ger att $b(-1)1 \equiv_3 1$ varur $b = -1$ är en av flera lösningar. Då $x \equiv_{13} -2$ så $c \cdot 2 \cdot 3 \equiv_{13} -2$ varur $c = 4$ är helt ok. Alltså $x = -26 + 24 + n \cdot 78$.

**Svar:** 2.

2. Vi använder metoden med inklusion exklusion. Låt $A$, $B$ och $C$ vara mängden av tal mellan 1 och 1000 som har 6, 7 respektive 8 som delare. Det tal $n$ vi söker ges av

$$n = 1000 - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|.$$

Eftersom vart sjätte tal är delbart med sex så $|A| = 166$. Vidare finner vi att $|B| = 142$, $|C| = 125$, $|A \cap B| = 23$, $|A \cap C| = 41$, $|B \cap C| = 17$ och $|A \cap B \cap C| = 5$.

**Svar:** $1000 - (166 + 142 + 125) + (23 + 41 + 17) - 5 = 643$.

3. a) Matrisen har tre linjärt oberoende rader och koden har längden sex. Antalet ord blir då

$$|C| = 2^{6-3} = 8.$$

b) Koden $C$ består av de ord $c$ sådana att

$$Hc^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För det givna ordet $v$ gäller att

$$Hv^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denna kolonnmatris är inte nollkolonnen och alltså ligger inte ordet $v$ i koden. Om ordet $v$ hade legat på avståndet ett från något kodord skulle $Hv^T$ vara lika med någon av matrisen $H$ : s kolonner. Så är inte fallet. Beteckna kolonnerna ett till sex med respektive $e_1, e_2, \ldots, e_6$. Kolonnen $Hv^T$ kan skrivas som summan av två kolonner på flera olika sätt:

$$Hv^T = e_2 + e_5 = e_1 + e_6 = e_3 + e_4.$$

Då gäller

$$H(v + 010010)^T = H(v + 100001)^T = H(v + 001100)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att orden $v + 010010$, $v + 001100$ och $v + 100001$ ligger i koden och har avståndet två till $v$.
c) Om det funnes ett sådant ord $c_0$ skulle orden i mängden $C \cup (c_0 + C)$ alla ha ett inbördes avstånd på minst tre, ty om $c, c' \in C$ så $d(c_0 + c, c') = d(c_0, c' - c) = d(c_0, c'') \geq 3$, där även $c'' = c - c' \in C$ eftersom $C$ är linjär. Sfärer med radien ett runt kodord skulle då vara disjunkta. Eftersom varje sfår innehåller sju ord och så om antalet kodord vore 16 skulle det finnas minst $7 \cdot 16 = 112$ olika ord. Det finns dock bara 64 olika ord av längd sex. Alltså finns inget ord som ligger på avståndet tre från alla ord i koden

4. Rekursionsekvationens karakterisitiska ekvation

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

har rötterna $r = \pm 1, -2$. En allmän lösning kan då skrivas

$$a_n = A(+1)^n + B(-1)^n + C(-2)^n.$$

Begynnelsevärdesvillkoren ger då att $A + B + C = 0$, $A - B - 2C = 1$ och $A + B + 4C = 2$. Detta linjära ekvationssytem för $A$, $B$ och $C$ har lösningen $C = 2/3$, $A = 5/6$ och $B = -3/2$.

**Svar:** $a_n = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{2}{3}(-2)^n$.

5. Betrakta först en allmän cyklisk grupp $C_6 =< a >= \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = id\}$ med sex element. Den genereras av elementet $a$ som har ordning sex. Men observera att den också genereras av elementet $a^5$. Inga andra element i $C_6$ har ordning sex.

Varje element i $S_6$ av ordning sex genererar en cyklisk delgrupp med sex element. Av observartionen ovan ser vi att vi har att beräkna antalet element i $S_6$ av ordning sex. Totala antalet cykliska delgrupper med sex element blir då detta antal $m$ delat med två, dvs $m/2$.

Varje permutation $\varphi$ kan skrivas som en produkt av disjunkta cykler

$$\varphi = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k.$$

Om cykellängderna hos $\sigma_1$, $\sigma_2$, ..., $\sigma_k$ är $m_1$, $m_2$, ..., $m_k$ gäller att ordningen hos permutationen $\varphi$ är minsta gemensamma multiplen till $m_1$, $m_2$, ... och $m_k$.

Den slutsats vi kan dra är att om $\varphi$ har ordning sex så antingen är $\varphi$ en produkt av en 2-cykel och en 3-cykel eller är $\varphi$ en 6-cykel.

Antalet olika 6-cykler $\sigma$ i $S_6$ är $5!$. Antalet olika produkter av en 2-cykel och en 3-cykel är

$$\binom{6}{2}\binom{4}{3} \cdot 2 = 15 \cdot 4 \cdot 2 = 120.$$

**Svar:** $\frac{1}{2}(5! + 120) = 120$.

6. Vi delar in i olika fall: *Fall* $i$, för $i = 0, 1, \ldots, k$, är att precis $i$ av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, k\}$ blir ensamma i var och en av sina delmängder. Antalet möjligheter i *fall* $i$ är

$$\binom{k}{i} S(n - k, m - i)(m - i)(m - i - 1) \ldots (m - k + 1),$$

ty först väljer vi ut de $i$ stycken element som ligger ensamma i sina delmängder, sedan delar vi in de $n-k$ elementen i mängden $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$ i $m-i$ stycken icketomma delmängder. När detta är gjort ligger de $m-i$ delmängderna där och de återstående $k-i$ elementen placeras ut i dessa delmängder (högst en i varje).

Eftersom de olika delfallen är disjunkta får vi delsvaret

$$H(k,m,n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} S(n-k, m-i)(m-i)(m-i-1)\ldots(m-k+1).$$

Vi använder nu formeln ovan för att bestämma talet $H(2,4,7)$.

$$H(2,4,7) = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} S(7-2, 4-i)(4-i)(4-i-1)\ldots(4-2+1) =$$

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} S(5, 4-i)(4-i)(4-i-1)\ldots 3 = S(5,4)4\cdot 3 + S(5,3)3 + S(5,2).$$

För Stirlingtalen ovan gäller att $S(5,4)$ är antal sätt att välja ut en delmängd med två element till en mängd med 5 element, dvs 10, att

$$S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) = S(3,1) + 2S(3,2) + 3\cdot 6 = 1 + 2\cdot 3 + 18 = 25,$$

och $S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2) = 15$. Alltså

**Svar:** 120+75+15=210.

7. En rot är elementet $z$ eftersom för $z$ gäller att $z^3 - z + 1 = 0$. Eftersom faktorsatsen gäller i polynomringen $F[x]$, emedan $F$ är en kropp, söker vi dela det givna polynomet med faktorn $(x-z)$:

$$x^3 - x + 1 = (x-z)(Ax^2 + Bx + C).$$

Vi får direkt att $A = 1$, samt att $-Cz = 1$, $-Bz + C = -1$ och $-z + B = 0$. Så $B = z$ och $C = -z^{-1}$. Övriga rötter till ekvationen är då rötter till ekvationen

$$x^2 + zx - \frac{1}{z} = 0.$$

Kvadratkomplettering ger, då $z/2 = 2z$, följande:

$$(x+2z)^2 - (2z)^2 - \frac{1}{z} = 0,$$

som förenklas till

$$(x+2z)^2 = \frac{z^3+1}{z}.$$

Eftersom $z^3 - z + 1 = 0$ så har vi att $z^3 + 1 = z$ så ekvationen ovan reduceras till

$$(x+2z)^2 = 1.$$

Alltså $x = -2z \pm 1$. Eftersom $-2 = 1$ har vi rötterna

**Svar:** $x = z, z+1$ och $z+2$.

8. Antag att grafen $G$ inte är sammanhängande utan att nodmängden kan delas upp i två delmängder $V_1$ och $V_2$ sådana att mellan noderna i $V_1$ och noderna i $V_2$ finns inga kanter. I komplementgrafen $\overline{G}$ finns då mellan varje nod i $V_1$ och varje nod i $V_2$ en kant. Vi visar nu att $\overline{G}$ är sammanhängande. Låt $v$ och $u$ vara två godtyckliga noder. Vi skall visa att det finns en stig i $\overline{G}$ mellan $u$ och $v$. Om $u \in V_1$ och $v \in V_2$ (eller vice versa) finns en kant mellan $u$ och $v$, se ovan. Om både $u$ och $v$ tillhör $V_1$ tar vi en nod $v_2 \in V_2$ och använder kanterna mellan $u$ och $v_2$ och $v$ och $v_2$ för att bilda en stig. Pss om $u, v \in V_2$.

Alltså är $\overline{G}$ sammanhängande, men enligt förutsättningarna i uppgiften är $G$ och $\overline{G}$ isomorfa grafer. Alltså kan antagandet att $G$ inte är sammanhängande inte vara sant.