Institutionen för Matematik, KTH
Examinator: Dmitry N. Kozlov

Lösningar för omtentamen i 5B1204. DISKRET MATEMATIK för D
Onsdagen den 14 april 2004

Teoridel

Uppgift 1. (4p)
a) (2p) Kan man skriva 4 som $1002a + 134b$, för några $a, b \in \mathbb{Z}$? Motivera ditt svar.
Svar: ja, då Euklides ger $\gcd(1002, 134) = 2$.
b) (2p) Är det sant att $|\mathbb{Z}| = |A|$, där $A = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$? Motivera ditt svar.
Svar: ja. A har samma kardinalitet som $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vilket i sin tur har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}$, som vi visade på föreläsningen.

Uppgift 2. (4p)
a) (2p) Hur många partitioner av en mängd med 4 element finns det?
Direkt räkning ger 15.
b) (2p) Visa att $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, för alla heltal $n \geq 0$.
$2^n = (1+1)^n$, utveckla detta med binomialsatsen.

Uppgift 3. (4p)
a) (2p) Definiera grafisomorfi. Hur många ömsesidigt icke-isomorfa grafer med 3 hörn finns det?
Se Biggs för definitionen. Det finns 4 icke-isomorfa grafer med 3 hörn.
b) (2p) Vad är en Eulerscykel i en graf? Beskriv villkor på valenser som garanterar existensen av en Eulercykel.
Se Biggs för definitionen. Eulercykel existerar omm alla valenser ar jämna.

Uppgift 4. (4p)
a) (2p) Låt G vara en grupp som verkar på mängden X. Tag $x \in X$. Vad menas med stabilisatorn G_x? Vad menas med banan $G(x)$? Vilket samband finns det mellan talen $|G_x|$, $|G(x)|$, samt $|G|$?
Se Biggs för definitioner. Sambandet är $|G_x| \cdot |G(x)| = |G|$.
b) (2p) Kan en grupp med 15 element ha en delgrupp med 3 element? Motivera ditt svar.
Ja. T.ex. $C_{15} = \{1, x, x^2, \ldots, x^{14}\}$ har en delgrupp $\{1, x^5, x^{10}\}$.

Uppgift 5. (4p)
a) (2p) Definiera karakteristiken (eng. *characteristic*) av en kropp.
b) (2p) Definiera begreppet *primitivt element* i en kropp.
Se Biggs för definitioner.

Vänd!

Problemdel

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Uppgift 6. (6p)
a) (3p) Hur många $1 \leq x \leq 180$ finns det, så att $gcd(x, 180) \geq 2$?
Svar: $180 - \phi(180) = 132$.
b) (3p) Hur många $\pi \in S_5$ kommuterar med $\tau = (123)(45)$? Här är τ angivet i cykelform.
Såsom beskrevs i föreläsningen, verkar S_5 på sig själv med konjugering. Mängden av all permutationer som kommuterar med $\tau = (123)(45)$ är stabilisatorn St av τ. Vi vet att $|St| = |S_5|/|B|$, där B är banan av τ. Då två permutationer konjugerar omm de har samma cykeltyp, får vi att B består av alla permutationer med en 3-cykel och en 2-cykel. Räkningen ger att det finns 20 sådana. Alltså $|St| = |S_5|/|B| = 120/20 = 6$.

Uppgift 7. (6p)
a) (3p) Hitta 15^{100} i $\mathbb{Z}_{13}$.
Vi räknar i $\mathbb{Z}_{13}$. $15 = 2$, så $15^{100} = 2^{100}$. Fermats lilla sats ger $2^{12} = 1$. Då $100 = 12 \cdot 8 + 4$, vi har $2^{100} = (2^{12})^8 + 2^4 = 2^4 = 16 = 3$.
b) (3p) Hitta $\tau \in S_4$, sådan att $\tau\alpha\tau^{-1} = \mu$, där $\alpha = (12)(34)$, $\beta = (13)(24)$, $\alpha, \beta \in S_4$.
En standard metod ger $\tau = (1)(23)(4)$.

Uppgift 8. (6p)
a) (3p) Lös följande rekursion:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 2n - 1, \text{ för } n \geq 0, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Detta är ett standard problem. Hjälpekvationen är $x^2 - 5x + 6 = 0$, med rötter 2 och 3. Den partikulära lösningen av linjär form kan hittas: $a^{part} = n + 1$. Alltså $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + n + 1$. Genom att sätta in konstanter fås $a_n = 2^n - 3^n + n + 1$.
b) (3p) Beräkna antalet av sätt att kantfärga den kompletta grafen på 4 hörn, K_4, med 6 färger.
Det finns många sätt att räkna. T.ex. färg kanter (12), (13), (14) med 3 olika färger. Detta kan göras på $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sätt. Färg kanten (23) nu. Detta kan göras på 4 sätt. Om man färgar med samma färg som användes för (14), då kan man färga resten på 13 sätt. Annars (3 möjligheter) kan resten färgas på 7 sätt. Totalt $13 + 3 \cdot 7 = 34$ sätt. Alltså är svaret $120 \cdot 34 = 4080$.

Uppgift 9. (6p)
a) (3p) Visa att $S_3 \times S_2$ är inte isomorf med A_4, där A_4 är gruppen av alla jämna permutationer av 4 element.
A_4 har inga element av ordning 6.
b) (3p) För varje k, bestäm antalet av element av ordning k i den cykliska gruppen C_{24}.
Det antalet är $\phi(k)$.

Uppgift 10. (6p)
a) (3p) Faktorisera $x^4 + 3x^2 + 3x + 2$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.
Genom att lösa ett ekvationssystem på samma sätt som i föreläsningar och på tentamen den 10 mars, fås svaret $x^4 + 3x^2 + 3x + 2 = (x^2 + 3x + 3)(x^2 + 2x + 4)$.
b) (3p) Hitta $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, som har grad 5 och kan faktoriseras som en produkt av två icke-linära irreducibla polynom.
Det gäller att hitta faktorer först. En möjlighet: $(x^2+1)(x^3+2x+1) = x^5+x^2+2x+1$.