Institutionen för Matematik, KTH
Examinator: Dmitry N. Kozlov

omtentamen i 5B1204. DISKRET MATEMATIK för D
Onsdagen den 14 april 2004

Skrivtid 14.00-19.00
Tillåtna språk: svenska, engelska.
Hjälpmedel: BETA. Ingenting annat är tillåtet, inte ens räknedosa.
Betygsgränser (preliminära): 20 poäng ger betyg 3, 30 poäng ger betyg 4, 42 poäng ger betyg 5.
Den som kompletterar skall endast lösa problem för de moment som behöver kompletteras. För $x \in \mathbb{Z}_5$ motsvarar problem nummer x moment nummer x.
Slutbetyget på kursen bestäms av betyget på skrivningen och betyget på uppsatsen.

Teoridel

Uppgift 1. (4p)
a) (2p) Kan man skriva 4 som $1002a + 134b$, för några $a, b \in \mathbb{Z}$? Motivera ditt svar.
b) (2p) Är det sant att $|\mathbb{Z}| = |A|$, där $A = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$? Motivera ditt svar.

Uppgift 2. (4p)
a) (2p) Hur många partitioner av en mängd med 4 element finns det?
b) (2p) Visa att $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, för alla heltal $n \geq 0$.

Uppgift 3. (4p)
a) (2p) Definiera grafisomorfi. Hur många ömsesidigt icke-isomorfa grafer med 3 hörn finns det?
b) (2p) Vad är en Eulerscykel i en graf? Beskriv villkor på valenser som garanterar existensen av en Eulercykel.

Uppgift 4. (4p)
a) (2p) Låt G vara en grupp som verkar på mängden X. Tag $x \in X$. Vad menas med stabilisatorn G_x? Vad menas med banan $G(x)$? Vilket samband finns det mellan talen $|G_x|$, $|G(x)|$, samt $|G|$?
b) (2p) Kan en grupp med 15 element ha en delgrupp med 3 element? Motivera ditt svar.

Uppgift 5. (4p)
a) (2p) Definiera karakteristiken (eng. *characteristic*) av en kropp.
b) (2p) Definiera begreppet *primitivt element* i en kropp.

Vänd!

Problemdel

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Uppgift 6. (6p)
a) (3p) Hur många $1 \leq x \leq 180$ finns det, så att $gcd(x, 180) \geq 2$?
b) (3p) Hur många $\pi \in S_5$ kommuterar med $\tau = (123)(45)$? Här är τ angivet i cykelform.

Uppgift 7. (6p)
a) (3p) Hitta 15^{100} i $\mathbb{Z}_{13}$.
b) (3p) Hitta $\tau \in S_4$, sådan att $\tau\alpha\tau^{-1} = \mu$, där $\alpha = (12)(34)$, $\beta = (13)(24)$, $\alpha, \beta \in S_4$.

Uppgift 8. (6p)
a) (3p) Lös följande rekursion:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 2n - 1, \text{ för } n \geq 0, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

b) (3p) Beräkna antalet av sätt att kantfärga den kompletta grafen på 4 hörn, K_4, med 6 färger.

Uppgift 9. (6p)
a) (3p) Visa att $S_3 \times S_2$ är inte isomorf med A_4, där A_4 är gruppen av alla jämna permutationer av 4 element.
b) (3p) För varje k, bestäm antalet av element av ordning k i den cykliska gruppen C_{24}.

Uppgift 10. (6p)
a) (3p) Faktorisera $x^4 + 3x^2 + 3x + 2$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.
b) (3p) Hitta $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, som har grad 5 och kan faktoriseras som en produkt av två icke-linära irreducibla polynom.