Lösningar till tentamen 5B1209/5B1215, "Signaler och system I", 040526

1a. Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen. Efter division med koefficienten x för derivattermen får den formen

$$y' + \frac{3}{x}\,y = 1 + \frac{1}{2x},$$

där man avläser en integrerande faktor:

$$\mathrm{e}^{\int 3/x \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{3\ln x\,(+C)} = \lceil \text{för } C = 0 \rceil = x^3.$$

Multiplikation med denna ger ekvationen

$$x^3\,y' + 3\,x^2\,y = x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 \Leftrightarrow (x^3\,y)' = x^3 + \frac{1}{2}\,x^2,$$

varav

$$x^3\,y = \int \left(x^3 + \frac{1}{2}\,x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{6}\,x^3 + D.$$

Begynnelsevillkoret $y(-1) = 0$ ger sedan

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + D \Leftrightarrow D = -\frac{1}{12}.$$

Alltså

$$\textbf{Svar: } y = \frac{3x^4 + 2x^3 - 1}{12x^3}.$$

1b. Funktionen är odefinierad bara för $x = 0$ och $\to \infty$ då $x \to 0-$. Det största intervall innehållande $x = -1$ i vilket lösningen är definierad är därför $x < 0$.

$$\textbf{Svar: } x < 0.$$

2a.

$$x(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & \text{då } |t| \le 1, \\ (2-t)^2, & \text{då } 1 < t \le 2, \\ (2+t)^2, & \text{då } -2 \le t < -1, \\ 0, & \text{då } 2 < |t|. \end{cases}$$

Funktionen $x(t)$ är kontinuerlig även i "brytpunkterna" $t = \pm 1$ och ± 2, så den generaliserade derivatan överensstämmer med den "klassiska":

$$x'(t) = \begin{cases} -2t, & \text{då } |t| < 1, \\ -2(2-t), & \text{då } 1 < t < 2, \\ 2(2+t) & \text{då } -2 < t < -1, \\ 0, & \text{då } 2 < |t|. \end{cases}$$

Eftersom höger- och vänsterderivatorna i punkterna $t = \pm 1$ och $t = \pm 2$ är lika – de är ∓ 2 respektive 0 – så är $x(t)$ deriverbar och $x'(t)$ kontinuerlig också i dessa punkter. Ytterligare derivering ger:

$$x''(t) = \begin{cases} -2, & \text{då } |t| < 1, \\ 2, & \text{då } 1 < |t| < 2, \\ 0, & \text{då } 2 < |t|, \end{cases}$$

som tydligen är sträckvis konstant med språng av storleken $+2, -4, +4$ och -2 i punkterna $t = -2, -1, 1$ respektive 2. Av detta får man:

$$x'''(t) = 2\delta(t+2) - 4\delta(t+1) + 4\delta(t-1) - 2\delta(t-2).$$

2b. Allmänt har man att

$$x'''(t) \xrightarrow{\text{FT}} (2\pi \mathrm{j} f)^3 \cdot X(f) \text{ och att } \delta(t-a) \xrightarrow{\text{FT}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} a f}.$$

Använt på tredjederivatan i 1a. ger detta

$$(2\pi \mathrm{j} f)^3 \cdot X(f) = 2\,\mathrm{e}^{4\pi \mathrm{j} f} - 4\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} f} + 4\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f} - 2\,\mathrm{e}^{-4\pi \mathrm{j} f} = 4\mathrm{j}\,\sin 4\pi f - 8\mathrm{j}\,\sin 2\pi f.$$

Varav **Svar:** $X(f) = \dfrac{2\,\sin 2\pi f - \sin 4\pi f}{2\pi^3 f^3} = \dfrac{8\,\sin\omega - 4\,\sin 2\omega}{\omega^3}.$

3. På matrisform kan systemet skrivas;

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -41 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi använder egenvärdesmetoden. Systemets egenvärden ges av:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -41 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 10\,\mathrm{i}.$$

Egenvektorerna som hör till egenvärdet $10\,\mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix} 8-10\,\mathrm{i} & -41 \\ 4 & -8-10\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\,v_1 - (4+5\,\mathrm{i})v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4+5\,\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning till systemet är därför:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5\,\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{10\,\mathrm{i}\,t}.$$

Eftersom det givna systemet har reella koefficienter så kommer också real- och imaginärdelarna för den komplexa lösningen att satisfiera ekvationen. För att kunna avläsa dessa skriver vi om:

$$\begin{pmatrix} 4+5\,\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{10\,\mathrm{i}\,t} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) (\cos 10\,t + \mathrm{i}\,\sin 10\,t)$$

Man får:

$$\text{Realdelen} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 10\,t - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 10\,t = \begin{pmatrix} 4\cos 10\,t - 5\sin 10\,t \\ 2\cos 10\,t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Imaginärdelen} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 10\,t + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 10\,t = \begin{pmatrix} 4\sin 10\,t + 5\cos 10\,t \\ 2\sin 10\,t \end{pmatrix}.$$

Dessa båda lösningar är linjärt oberoende och den allmänna lösningen till ett linjart 2×2-system utgörs alltid av de linjära kombinationerna av två linjärt oberoende lösningar, alltså:

$$\textbf{Svar:} \begin{cases} x_1 = (4A+5B)\cos 10\,t + (-5A+4B)\sin 10\,t, \\ x_2 = 2A\cos 10\,t + 2B\sin 10\,t, \end{cases} \quad A \text{ och } B \text{ är godt. konst.}$$

4a. Perioden $= 1/2 \Rightarrow$ fourierutvecklingen har formen

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{j} nt}, \text{ där } c_n = 2\int_{-1/4}^{1/4} \left(x(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{e}^{-4\pi \mathrm{j} nt} \mathrm{d}t.$$

Fourierkoefficienterna, a_n, för $x(t)$ är $= c_n$ för $n \neq 0$, medan $a_0 = c_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Variant 1:(Direkt beräkning)

$$c_n = 2\int_{-1/4}^{1/4} \cos \pi t \cdot \mathrm{e}^{-4\pi \mathrm{j} nt} \mathrm{d}t = 2\int_{-1/4}^{1/4} \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} t} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} t}}{2} \cdot \mathrm{e}^{-4\pi \mathrm{j} nt} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1/4}^{1/4} (\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j}(1-4n)t} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(1+4n)t})\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j}(1-4n)t}}{\pi \mathrm{j}(1-4n)} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}(1+4n)t}}{\pi \mathrm{j}(1+4n)}\right]_{-1/4}^{1/4}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j}/4} \cdot \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} n} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}/4} \cdot \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} n}}{\pi \mathrm{j}(1-4n)} - \frac{\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}/4} \cdot \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} n} - \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j}/4} \cdot \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} n}}{\pi \mathrm{j}(1+4n)} = \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} n} = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} n} = (-1)^n, \\ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j}/4} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}/4} = \\ = 2\mathrm{j} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\mathrm{j}. \end{array}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n \sqrt{2}\,\mathrm{j}}{\pi \mathrm{j}} \left(\frac{1}{1-4n} + \frac{1}{1+4n}\right) = \frac{(-1)^n\, 2\sqrt{2}}{\pi(1-16n^2)}.$$

Detta ger alltså a_n för $n \neq 0$, medan

$$a_0 = c_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4-\pi}{\sqrt{2}\,\pi}$$

Svar: $x(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{j} nt}$, där $a_n = \dfrac{(-1)^n\, 2\sqrt{2}}{\pi(1-16n^2)}$, då $n \neq 0$ och $a_0 = \dfrac{4-\pi}{\sqrt{2}\,\pi}$.

Variant 2:(Förenkling via derivering)

Funktionen $x(t)$ är kontinuerlig och dess derivata, som är den $\frac{1}{2}$-periodiska fortsättningen av

$$x'(t) = -\pi \sin \pi t, -\tfrac{1}{4} < t < \tfrac{1}{4},$$

har språng av storleken $2\pi \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\pi$ i punkterna $t = \frac{1}{4} + k \cdot \frac{1}{2}, k$ heltal. Andraderivatan är då den $\frac{1}{2}$-periodiska fortsättningen av

$$x''(t) = -\pi^2 \cos \pi t + \sqrt{2}\,\pi\, \delta(t - \tfrac{1}{4}), -\tfrac{1}{4} < t \leq \tfrac{1}{4},$$

d.v.s.

$$x''(t) + \pi^2\, x(t) = \sqrt{2}\,\pi\, \delta(t - \tfrac{1}{4}) - \tfrac{\pi^2}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{4} < t \leq \tfrac{1}{4}.$$

Om a_n är fourierseriekoefficienterna för $x(t)$, så är koefficinterna för vänster led i den senaste likheten $= ((4\pi\, \mathrm{j} n)^2 + \pi^2) a_n = \pi^2(1 - 16\, n^2) a_n$, medan fourierkoefficienterna för funktionen i höger led ges av

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} \int_{-1/4+}^{1/4+} (\sqrt{2}\,\pi\, \delta(t - \tfrac{1}{4}) - \tfrac{\pi^2}{\sqrt{2}}) \cdot \mathrm{e}^{-4\pi \mathrm{j} nt} \mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\,\pi\, \cdot \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} n} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \pi^2 \cdot \delta[n],$$

där $\delta[n] = 1$ om $n = 0$ och annars $= 0$.

Anmärkning: Detta kan också erhållas ur de generella egenskaperna hos "fourierserietransformen":

$$T\text{-periodiska fortsättningen av } \delta(t) \xrightarrow{\text{FS}} \tfrac{1}{T},$$

$$T\text{-periodiska fortsättningen av } \delta(t-a) \xrightarrow{\text{FS}} \tfrac{1}{T} \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} na/T},$$

$$1 \xrightarrow{\text{FS}} \delta[n],$$

$$\text{d.v.s. för } T=\tfrac{1}{2}:\ \sqrt{2}\,\pi\,\delta(t-\tfrac{1}{4})-\tfrac{\pi^2}{\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{FS}}2\sqrt{2}\pi\cdot \mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} n}-\tfrac{\pi^2}{\sqrt{2}}\cdot\delta[n].$$

Man får

$$a_n=\frac{(-1)^n\,2\sqrt{2}\,\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\pi^2\cdot\delta[n]}{\pi^2(1-16\,n^2)}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n\,2\sqrt{2}}{\pi(1-16n^2)}, & \text{då} \quad n\neq 0,\\[2ex] \dfrac{4-\pi}{\sqrt{2}\,\pi}, & \text{då} \quad n=0.\end{cases}$$

4b. Att signalen $x[t]$ är $\frac{1}{2}$-periodisk innebär att dess spektrum består av heltalsmultiplerna av grundfrekvensen 2 [Hz]. Den filtrerade signalen, $\hat{x}(t)$:s, spektrum innehåller därför bara frekvenserna 0 och ± 1:

$$\hat{x}(t)=\sum_{n=-1}^{1}a_n\mathrm{e}^{4\pi \mathrm{j} n t}$$

Den bortfiltrerade medelenergin/period = totala − filtrerarade signalens energi/period:

$$2\int_{-1/4}^{1/4}|x(t)|^2\mathrm{d}t-(|a_{-1}|^2+|a_0|^2+|a_1|^2).$$

Här får man

$$2\int_{-1/4}^{1/4}|x(t)|^2\mathrm{d}t=2\int_{-1/4}^{1/4}\left(\cos\pi t-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\mathrm{d}t=2\int_{-1/4}^{1/4}(\cos^2\pi t-\sqrt{2}\cos\pi t+\tfrac{1}{2})\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{-1/4}^{1/4}(\tfrac{1}{2}\,\cos 2\pi t-\sqrt{2}\cos\pi t+1)\mathrm{d}t=2\left[\frac{\sin 2\pi t}{4\pi}-\sqrt{2}\,\frac{\sin\pi t}{\pi}\right]_{-1/4}^{1/4}+1=\frac{1}{\pi}-2\sqrt{2}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\pi}+1$$

$=1-\dfrac{3}{\pi}$ och, eftersom $a_0=\dfrac{4-\pi}{\sqrt{2}\pi}$ samt $a_{\pm 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{15\pi}$, så är andelen bortfiltrerad energi/period:

$$1-\frac{\frac{(4-\pi)^2}{2\pi^2}+2\cdot\frac{8}{15^2\pi^2}}{1-\frac{3}{\pi}}\approx 1-0,988=0,012.$$

Svar: C:a $1,2\%$.

5. Vi har att $\qquad x[n]=n\,y[n]+y[n],$

där $\qquad y[n]=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n u[n].$

Generellt gäller för den tidsdiskreta fouriertransformen:

$$a^n\,u[n]\xrightarrow{\text{TDFT}}\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}},\ \text{om } |a|<1,$$

$$n\,z[n]\xrightarrow{\text{TDFT}}-\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}Z_d(\nu)}{\mathrm{d}\nu},$$

Alltså

$$y[n]\xrightarrow{\text{TDFT}}\frac{1}{1-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}=\frac{4}{4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}},$$

$$n\,y[n]\xrightarrow{\text{TDFT}}-\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{4}{4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}\right)$$

$$= -\frac{4}{2\pi \mathrm{j}} \frac{-1}{(4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu})^2} \left(-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}\right)(-2\pi \mathrm{j}) = \frac{4\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}{(4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu})^2},$$

Varav
$$x[n] \xrightarrow{\text{TDFT}} \frac{4}{4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}{(4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu})^2} = \frac{16}{(4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu})^2}.$$

Svar: $\dfrac{16}{(4-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu})^2}$.

6a. Eftersom $x(t) * p(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(f) \cdot P(f)$, där $P(f)$ är $p(t)$:s fouriertransform och vi vill att

$$X(f) \cdot P(f) = \begin{cases} X(f), & \text{då } |f| \le 660 \text{ och} \\ 0, & \text{då } |f| \ge 2 \times 660, \end{cases}$$

så duger $P(f) = \mathrm{rect}_{2q}(f) = \begin{cases} 1, & \text{då } |f| < q, \\ 0, & \text{då } |f| > q, \end{cases}$ med ett q i intervallet $660 < q < 1320$.

Men $\qquad \mathrm{rect}_{2q}(f) = \mathrm{rect}_1(f/(2q))$ och $\mathrm{rect}_1(f) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} \mathrm{sinc}(t)$.

Vidare gäller generellt att $\qquad Y(f/a) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} a\,y(at)$ om $a > 0$,

alltså $\qquad \mathrm{rect}_{2q}(f) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} 2q\ \mathrm{sinc}(2qt)$.

Svar: $p(t) = 2q\ \mathrm{sinc}(2qt)$, där q är en konstant i intervallet $660 < q < 1320$.

6b. Om tonen med frekvens f_0 detekteras under ett tidsintervall av längd L, så kommer upplösningen Δf_0 på frekvenssidan att vara $1/L$. Man vill i detta fall att $\frac{\Delta f_0}{f_0} < 0.5\,10^{-3}$, vilket alltså innebär att $L > \frac{1}{0.5\,10^{-3}\,f_0} = \frac{2000}{f_0}$.

Den filtrerade signalen $\hat{x}(t) = x(t) * p(t)$ är bandbegränsad med en bandbredd större än den aktuella pipans grundtonsfrekvens f_0. Om ljudet samplas med ett sampelavstånd T, så ges den samplade tonens transform av $\frac{1}{T} \times$ den $\frac{1}{T}$-periodiska fortsättningen av $\hat{X}(f)$:

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{X}(f - n/T).$$

För att denna i intervallet $|f| < f_0$ skall överensstämma med $\hat{X}(f) = X(f)$, så måste $\frac{1}{T} > 2\,f_0$. För antalet sampel, $N = \frac{L}{T}$, får man

$$N > \frac{2000}{f_0} \cdot 2\,f_0 = 4000.$$

Svar: Man bör sampla under ett tidsintervall av längd L minst $\dfrac{2000}{f_0}$ $[s]$. Antalet sampel bör överskrida $\dfrac{L}{2f_0} > 4000$.