Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, Signaler och system I, för IT2 (5B1209/5B1215:2) den 26 maj 2004 kl $14^{00} - 19^{00}$.

Hjälpmedel:
Zill-Cullen: Differential Equations with Boundary-Value Problems, Oppenheim-Willsky: Signals and Systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial i signaler och system, BETA Mathematics Handbook, Formelsamling i Signalbehandling. Räknedosa.
Fordringar: 24p, 32p respektive 40p räcker för betygen 3, 4 respektive 5.

1. a. Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$xy' + 3y = x + \frac{1}{2}$$

för vilken $y(-1) = 0$. (7p)

b. Vilket är det största *intervall* i vilken lösningen i uppgift a. är giltig. (1p)

2. Låt $x(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & \text{då } |t| \le 1, \\ (2 - |t|)^2, & \text{då } 1 < |t| \le 2, \\ 0, & \text{då } 2 < |t|. \end{cases}$

a. Beräkna de generaliserade derivatorna $x'(t), x''(t)$ och $x'''(t)$. (5p)

b. Bestäm fouriertransformen för $x(t)$. (3p)

3. Beräkna den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 8x_1(t) &- 41x_2(t), \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) &- 8x_2(t). \end{cases}$$

på reell form. (8p)

4. a. Låt $x(t)$ vara den $\frac{1}{2}$-periodiska signal för vilken

$$x(t) = \cos \pi t - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ då } -\frac{1}{4} < t \le \frac{1}{4}.$$

Bestäm den komplexa fourierserieutvecklingen av $x(t)$. (5p)

b. Signalen, med t mätt i sekunder, sänds genom ett idealt lågpassfilter som filtrerar bort alla signaler med frekvens $|f| > 3\,[\text{Hz}]$ och som inte påverkar signaler med lägre frekvens. Hur stor andel av signalens medelenergi/period går därvid förlorad? Medeleenegin hos en T-periodisk signal definieras som

$$\frac{1}{T} \int_{<T>} |x(t)|^2 \, dt, \text{ där integrationen utsträcks över en period.}$$ (3p)

Var god vänd!

5. Bestäm den tidsdiskreta fouriertransformen till följden:

$$x[n] = \frac{n+1}{4^n} \cdot \mathrm{u}[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

där
$$\mathrm{u}[n] = \begin{cases} 1, & \text{om } n \geq 0, \\ 0, & \text{om } n \leq -1. \end{cases}$$

Svaret får inte innehålla integraler (8p)

6. Vid finstämning av orgelpipor registrerar man ljudet genom att sampla det under viss tid. En ideal pipa har en grundton med frekvens f[Hz] och ett antal övertoner med frekvenserna nf [Hz], där $|n| > 1$ är ett heltal. De olika pipornas grundtoner ligger i frekvensintervallet $16 - 4500$ [Hz].

Man vill kunna stämma piporna så att den relativa frekvensavvikelsen är mindre än $0.5 \cdot 10^{-3}$ (d.v.s. om felet vid frekvensen f är Δf, så skall $\frac{\Delta f}{f} < 0.5 \cdot 10^{-3}$).

a. Man filtrerar bort övertonerna med ett idealt lågpassfilter. Detta görs genom att den inkommande signalen $x(t)$ ersätts med $x(t) * p(t)$, med ett lämpligt $p(t)$. Hur kan p väljas om det gäller att stämma en barockorgels pipa med tonhöjden ess″, d.v.s. en med frekvensen 660 [Hz]? (5p)

b. Efter filtreringen samplas tonen under ett tidsintervall. Ange som funktion av tonens frekvens f_0 [Hz] hur lång tid man behöver sampla och hur många sampel som behövs för att man säkert skall kunna detektera avvikelser som är större än ovannämnda felgräns. (5p)

Lycka till!