KTH Matematik
Avd Matematik

Lösningar till Tentamensskrivning, Signaler och system, I, för E2 och ME2 (5B1209 / 5B1215/2) den 23 augusti, 2004, kl. 14.00 - 19.00

Av 50p totalt: 24p, 32p respektive 40p räcker för betygen 3, 4, respektive 5.

1. a. Med separation av variabler blir ekvationen

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx,$$

som integreras till

$$-\frac{1}{y-1} = x + C$$

(Vid separationen av variable tappar vi den konstanta lösningen $y(x) = 1$)
Efter omskrivning får vi

$$y = 1 - \frac{1}{x+C}$$

Sätter vi in villkoret $y(0) = a$ får vi $a = 1 = -\frac{1}{0+C}$ dvs $C = \frac{1}{1-a}$, när $a \neq 1$ och lösningen blir då:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x + \frac{1}{1-a}} = 1 - \frac{1-a}{x - ax + 1} = \frac{x - ax + a}{x - ax + 1}$$

sätter vi in $a = 1$ i det sista uttrycket blir det lika med ett, dvs den konstanta lösningen $y(x) = 1$ innefattas också av detta uttryck. Svaret blir

$$y(x) = \frac{x - ax + a}{x - ax + 1}$$

b. Den konstanta lösningen $y(x) = 1$ som vi får när $a = 1$, den är definerad för alla x. När $a \neq 1$ är lösningen inte definierad när vi har noll nämnaren i svaret i a. Dvs när $x - ax + 1 = 0, \Leftrightarrow x = \frac{1}{a-1}$.
Svar: Om $a = 1$ så är $y = 1$ en lösning definerad för alla x Om $a \neq 1$ så finns inga sådana

2. Låt oss beräkna fouriertransformen uttyckt i frekvens f. $x(t) = \text{rect}_1 * \text{rect}_1(\text{t} - 1)$. rect_1 har fouriertransformen

$$\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

$\mathrm{rect}_1 * \mathrm{rect}_1$ har då fouriertransformen $\mathrm{sinc}^2(f)$, och translation med en enhet motsvaras att fouriertransformen multipliceras med factorn $\mathrm{e}^{-j2\pi f}$. Fouriertransformen till $x(t)$ blir därför:

$$X(f) = \mathrm{e}^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}^2(f)$$

b. Fourierseriekoefficienterna för den P-periodiska utvidginingen

$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - mP)$$

är

$$X_P[n] = \frac{1}{P}X(\frac{n}{P})$$

(när fouriertransformen är uttryckt i frekvens f.)
Vi får med $P = 4$:

$$a_n = X_4[n] = \frac{1}{4}X(\frac{n}{4}) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}n}\mathrm{sinc}^2(\frac{n}{4}) = \frac{(-j)^n}{4}\mathrm{sinc}^2(\frac{n}{4})$$

Vi har:

För $n = 0$ gäller	$\mathrm{sinc}(0) = 1$,	vilket ger	a_0	$= \frac{1}{\cdot}$,
För $n = 4k$, k ej 0 gäller	$\mathrm{sinc}(k) = 0$,	vilket ger	a_{4k}	$= 0$,
För $n = 4k \pm 1$ gäller	$\lvert\mathrm{sinc}(k \pm \frac{1}{4})\rvert = \frac{1}{\pi\sqrt{2}(\frac{k}{2}+\pm\frac{1}{4})}$,	vilket ger	a_{4k+1}	$= \frac{\pm(-j)}{2\pi^2(2k\pm\frac{1}{2})^2}$,
För $n = 4k + 2$ gäller	$\lvert\mathrm{sinc}(k + \frac{1}{2})\rvert = \frac{1}{\pi(k+\frac{1}{2})}$,	vilket ger	a_{4k+2}	$= \frac{-1}{\pi^2(2k+1)^2}$,

(*Kommentar.* Med en alternativ definition av fourierseriekoefficienten:

$$X_P[n] = X(\frac{n}{P}).$$

)

3. Vi finner först egenvärdena till det homogena systemet.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

för $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$
Egenvektor för $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

ger egenvektorn

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Egenvektor för $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

ger egenvektorn

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen till det homogena systemet är:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \\ 2C_1 \mathrm{e}^{3t} - 2C_2 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

b. Vi ansätter en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen:

$$\begin{pmatrix} x_{1p}(t) \\ x_{2p}(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Insatt i differentialekvations får vi:

$$-2e^{-2t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - e^{-2t} \begin{pmatrix} a+b \\ 4a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d \\ 4c+d \end{pmatrix} =$$

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -3a - b = 1 \\ -4a - 3b = 0 \\ -c - d = 0 \\ -4c - d = 1 \end{cases}$$

Med lösning $a = -\frac{3}{5}$, $b = \frac{4}{5}$, $c = -\frac{1}{3}$ och $d = \frac{1}{3}$
Det inhomogena systemet har den allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{3} \\ 2C_1 \mathrm{e}^{3t} - 2C_2 \mathrm{e}^{-t} + \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c. Vi sätter in $t = 0$ och får då:

$$0 = x_1(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{5} - \frac{1}{3}$$

Om lösningen ska vara begänsad på intervallet $[0, \infty]$ så måste $C_1 = 0$ eftersom $\mathrm{e}^{3t} \to \infty$ då $t \to \infty$, vilket då medför att $C_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$.
Lösningen blir därför:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15}\mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{3} \\ -\ \frac{28}{15}\mathrm{e}^{-t} + \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. a. Om $y[n]$ är reell och $y[n] = y[-n]$ för alla n så blir TDFT:n reell. alternativ vi kan skriva ut detta explicit:

$$Y(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} y[n] \mathrm{e}^{-jn\pi nf} = y[0] + 2\sum_{1}^{\infty} y[n] \cos(2\pi nf)$$

vilket är reellt.
b. Vi använder oss formeln för summan av en geometrisk serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ när } |r| < 1$$

Vi utnyttjar att $\mathrm{e}^{j2\pi nf} + \mathrm{e}^{-j2\pi nf} = 2\mathbf{Re}(\mathrm{e}^{j2\pi nf})$.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{e}^{j2\pi nf} = \\ &2\mathbf{Re}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-(2k+1)}\mathrm{e}^{j2\pi(2k+1)f}\right) + \left(2\mathbf{Re}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-2k}\mathrm{e}^{j2\pi 2kf}\right) - 1\right) = I + II \end{aligned}$$

Det första termen (summan med udda n) blir

$$I = \frac{2}{3}\mathbf{Re}\mathrm{e}^{-2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\left(3^2\mathrm{e}^{-4\pi jf}\right)^k = \frac{2}{3}\mathbf{Re}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi jf}}{1-3^2\mathrm{e}^{-4\pi jf}} = \mathbf{Re}\frac{6\mathrm{e}^{-2\pi jf}}{9-\mathrm{e}^{-4\pi jf}} = \frac{24\cos(4\pi f)}{41-9\cos(4\pi f)}$$

Den andra termen (summan över jämna n) blir

$$\begin{aligned} II = \quad & 2\mathbf{Re}\left(\textstyle\sum_0^{\infty} 2^{-2k}\mathrm{e}^{j2\pi 2kf}\right) - 1 = \mathbf{Re}\left(\frac{2}{1-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{j4\pi f}}\right) - 1 = \\ & \mathbf{Re}\left(\frac{8}{4-\mathrm{e}^{j4\pi f}}\right) - 1 = \frac{32-8\cos(4\pi f)}{17-8\cos(4\pi f)} - 1 = \frac{15}{17-8\cos(4\pi f)} \end{aligned}$$

Lägger vi samman I och II får vi svaret

$$Y(f) = \frac{24\cos(4\pi f)}{41-9\cos(4\pi f)} + \frac{15}{17-8\cos(4\pi f)}$$

5. Vi beräknar det kvadratiska medelvärdet M och fourierkoefficienterna

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-jkt}dt$$

Vi får:

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

och för $k > 0$

$$\begin{aligned} a_k = \quad & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}|t|\mathrm{e}^{-jkt}dt & &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt & &= \\ & \tfrac{1}{\pi}\left[t\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt & &= 0 - \tfrac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos kt}{k^2}\right]_0^{\pi} & &= \tfrac{1}{\pi}\frac{(-1)^k-1}{k^2}. \end{aligned}$$

Eftersom f är en jämn funktion har vi $a_{-k} = \overline{a_k}$.
Observera att förutom för a_0 är $a_k \neq 0$ endast för udda $k = 2n+1$.
Vi skriver

$$f_N = \sum_{k=-N}^{N} a_k\mathrm{e}^{jnt}$$

Vi har då det kvadratiska medelfelet

$$E = M - \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$$

vilket ska vara mindre än 1 procent av M. Dvs.

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{[(N-1)/2]} \frac{4}{(2n+1)^4} < 0.01\frac{\pi^2}{3}$$

ska vara uppfyllt.Olikheten kan skrivas om

$$24 \sum_{n=0}^{[(N-1)/2]} \frac{1}{(2n+1)^4} > 0.24\pi^4$$

dvs

$$\sum_{n=0}^{[(N-1)/2]} \frac{1}{(2n+1)^4} > 0.01\pi^4$$

(Här är $[(N-1)/2]$ största heltal $\leq (N-1)/2$)
Eftersom $97 < \pi^4 < 98$, (med kalkulator) är högerledet mindre än 0.98
Med $N = 1$ blir vänstra sidan lika med 1 och olikheten blir uppfylld. b. Insättning i den trigonometriska summa f_N ovan med $N = 1$:

$$f_N = a_0 + a_1 \mathrm{e}_{jt} + a_{-1}\mathrm{e}_{-jt} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{jt} - \frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-jt} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(t)$$

6. Den samplade signalen $\tilde{x}[n] = x(\frac{n}{f_s})$ har den periodiska fouriertransformen

$$\tilde{X}(f)] - \frac{1}{P}\sum_m X(f - mf_s)$$

där $f_s = 560$ är samplingsfrekvensen och perioden $P = \frac{1}{f_s}$
Alla frekvenser utom frekvenserna $|f| \leq 200$ filtreras bort. Den ursprungliga signalen har frekvenserna $g = \pm 700, \pm 750$, och ± 800 dvs vi söker frekvenser f , med $|f| \leq 200$ så att $f = g - mf_s = g - 560m$ för något heltal m.
För $g = 700$ så blir $f = 140$ för $m = 1$,
för $g = 750$ så blir $f = 190$ för $m = 1$
de enda möjliga frekvenserna.
För $g = 800$ och med $m = 1$ blir $f = 240$ och för med $m = 2$ blir $f = -320$ båda utanför intervallet $|f| \leq 200$, och dessa var de frekvenser som ligger närmast, det finns därför inga andra heller.
Med motvarande negativa frekvenser g ger motsvarande frekvenser f med motsatt tecken.
Svaret blir: frekvensinnehållet är frekvenserna $f = 140$Hz och $f = 190$Hz. (De negativa frekvensera är en del av symmetrien eftersom signalen är reell och brukar oftast därför inte anges.)