KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 17-24p; 4: 25-31p; 5: 32-40p, inklusive bonus.
Uppgifterna: 1-7 ger 3 poäng vardera och 8-10 ger 5 poäng vardera.
Bonuspoäng från hösten 2003 får tillgodoräknas.

1. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right)dx$.

Lösning:

Den givna integrationsordningen innebär följande: $\begin{cases} x:\ 0 \to 1 \\ y:\ \sqrt{x} \to 1 \end{cases}$.

Vi kastar om integrationsordningen.

Då erhålles: $\begin{cases} x:\ 0 \to y^2 \\ y:\ 0 \to 1 \end{cases}$.

Dubbelintegralen blir då

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right)dx = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{y^2} e^{x/y}\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{1}\left[y e^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} dy$$

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right)dx = \int_{y=0}^{1}(ye^{y} - y)\,dy = \left[ye^{y} - e^{y} - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

SVAR: Dubbelintegralen blir $\frac{1}{2}$.

2 Betrakta differentialekvationen $y' = y(y-1)(y-3)$, där $y = y(t)$ och t anger tiden.
Analysera vad som händer efter lång tid. Studera speciellt startvärdena $y(0) = 3$ respektive $y(0) = 2$.
Lösning:
Vi bestämmer först de stationära lösningarna och finner att dessa är $y = 0,\ 1$ respektive 3.
En teckenstudie hos förstaderivatan genomföres och följande utfall erhålles:

$$\begin{cases} y' > 0\ ,\ y > 3 \\ y' < 0\ ,\ 1 < y < 3 \\ y' > 0\ ,\ 0 < y < 1 \\ y' < 0\ ,\ y < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\ \text{växande}\ ,\ y > 3 \\ y\ \text{avtagande}\ ,\ 1 < y < 3 \\ y\ \text{växande}\ ,\ 0 < y < 1 \\ y\ \text{avtagande}\ ,\ y < 0 \end{cases}$$

För $y(0) = 3$ förblir lösningen kvar på den stationära lösningen.
För $y(0) = 2$ innebär det att startvärdet ligger i ett intervall där lösningen är avtagande och nedåt begränsad av $y = 1$.
SVAR: För startvärdet $y(0) = 3$ förändras ej funktionsvärdet ty detta är en stationär lösning.
För startvärdet $y(0) = 2$ kommer funktionsvärdet att gå mot ett efter lång tid.

3. En full tank innehåller 300 liter vatten i vilket 50 gram salt är löst.
En annan saltlösning med koncentrationen 2 gram per liter pumpas in med en hastighet av 3 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Ställ även upp motsvarande differentialekvation då utpumpningshastigheten är 2 liter per minut.
Bestäm saltmängden vid tiden t för det fall då tanken ej sprängs.
Lösning:
Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t .

Förändringen av saltmängden per tidsenhet blir: $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 3$.

Vid den lägre pumphastigheten erhålles istället differentialekvationen: $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 2$.

För att tanken ej skall sprängas måste inpumpningshastigheten och utpumpningshastigheten vara lika.
Vi löser således den första differentialekvationen.
Denna är linjär av första ordningen och en allmän lösning kan erhållas som alllmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.

Den allmänna homogena lösningen ges av $S_h(t) = Ae^{-\frac{t}{100}}$ och en partikulärlösning är $S_p(t) = 600$.

Den allmänna lösningen är således $S(t) = S_h(t) + S_p(t) = Ae^{-\frac{t}{100}} + 600$.
Vid tiden noll är saltmängden lika med 50 gram. Det ger att konstanten är lika med -550.

Den sökta lösningen är $S(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$.

SVAR: Den första differentialekvationen blir $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 3$.

Den andra differentialekvationen blir $\dfrac{dS}{dt} = 2 \cdot 3 - \dfrac{S(t)}{300} \cdot 2$.

Den sökta lösningen är $S(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$.

4. Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = 0 \;,\; x > 0$
samt en partikulärlösning till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = e^x \;,\; x > 0$.
Lösning:
Den givna differentialekvationen är linjär. En strategi är att bestämma en lösning till den homogena differentialekvationen och därefter reducera ordningen. Den homogen differentialekvationen kan omformas till följande differentialekvation: $y'' - 2y' + y = 0$.

En lösning till denna ges av $y_1 = e^x$ .Sätt nu $y = e^x z(x)$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger oss följande differentialekvation:
$e^x x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$, vilken förenklad blir $z'' = \dfrac{1}{x}$.

Integration ger oss $z' = \ln x + C_1$. Upprepad integration ger: $z = x \ln x - x + C_1 x + C_2$.
Allmänna lösningen till dufferentialekvationen är
$y = e^x z = e^x (x \ln x - x + C_1 x + C_2) = C_1 x e^x + C_2 e^x + e^x (x \ln x - x)$.

En partikulärlösning är $y_p = e^x (x \ln x - x)$.
En fundamentalmängd av lösningar består av två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen.
I vårt fall har vi $\left\{ xe^x, e^x \right\}$, ty dessa är linjärt oberoende.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\left\{ xe^x, e^x \right\}$. En partikulärlösning är $y_p = e^x (x \ln x - x)$.

5. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3 \;,\; 1 \le t \le 2$ och noll för övrigt.
Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.
Lösning:
Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = F(s)$.

Insättning av begynnelsevillkoren ger $Y(s) = \dfrac{s+3}{s^2+9} + \dfrac{F(s)}{s^2+9}$.

För bestämning av högerledets Laplacetransform använder vi dess definition.(Heaviside går också bra.)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_1^2 3e^{-st}\,dt = \frac{3(e^{-s} - e^{-2s})}{s}.$$

Den sökta lösningens Laplacetransform är $Y(s) = \dfrac{s+3}{s^2+9} + \dfrac{3(e^{-s} - e^{-2s})}{s(s^2+9)} = \dfrac{s+3}{s^2+9} + \dfrac{1}{3}(e^{-s} - e^{-2s})(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+9})$.

Återtransformering ger oss vår sökta lösning:

$$y(t) = \cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}U(t-1)(1-\cos 3(t-1)) - \frac{1}{3}U(t-2)(1-\cos 3(t-2)).$$

Här är $U(t-a)$ Heavisidefunktionen.
SVAR: Den sökta lösningen är

$$y(t) = \cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}U(t-1)(1-\cos 3(t-1)) - \frac{1}{3}U(t-2)(1-\cos 3(t-2)).$$

6. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Låt matrisen $\mathbf{A}$ vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2.
Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)
a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.
b $\lambda_{1,2} = -1 \pm 9i$.
c) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$.

Lösning:
a) I detta fall är egenvärden reella och med olika tecken. Således är det en sadelpunkt och därmed instabil.
b) Komplexa egenvärden med realdelen skild ifrån noll.
Detta är en spiral och negativ realdel medför att spiralen är stabil.
c) Reella och skilda egenvärden ger en nod och negativa egenvärden medför stabilitet.
SVAR: a) Sadelpunkt, instabil.
b) Stabil spiral.
c) Stabil nod.

7. Bestäm den funktion, $u(x,t)$, som uppfyller differentialekvationen $u_t = u_x$ och villkoret $u(x,0) = 7e^x + 5e^{3x}$.
Lösning:
Vi använder variabelseparationsmetoden, dvs vi sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ och sätter in detta i den givna partiella differentialekvationen. Vi får då: $X(x)T'(t) = X'(x)T(t)$, dividera med $X(x)T(t)$. Då erhålles $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X'(x)}{X(x)}$.

Denna kvot är konstant, ty vänstra ledet beror endast av t och högra ledet beror endast av x. Kalla konstanten för λ.

Vi får då ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X'(x) = \lambda X(x) \end{cases}$.

Detta system har den allmänna lösningen $\begin{cases} T(t) = Ae^{\lambda t} \\ X(x) = Be^{\lambda x} \end{cases}$ vilket ger $u(x,t) = Be^{\lambda x}Ae^{\lambda t} = Ce^{\lambda(x+t)}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösning till differentialekvationen. Vi skall bestämma den lösning som uppfyller villkoret $u(x,0) = 7e^x + 5e^{3x}$. Den sökta lösningen är $u(x,t) = 7e^{(x+t)} + 5e^{3(x+t)}$.

SVAR: Den sökta funktionen är $u(x,t) = 7e^{(x+t)} + 5e^{3(x+t)}$.

8.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a,b]$.
Låt vidare $y = f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$.
Bestäm f :s utveckling i den ortogonala funktionsföljden.

b) Utveckla $f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & -\pi < x < 0 \\ \pi - x \ , & 0 \le x < \pi \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1,\ \cos nx,\ \sin mx\}$, $n = 1,2,3,..,\ \ m = 1,2,3,\ldots$.

c) Bestäm seriens värde för $x = 0$.

Lösning:

a) Låt den givna följden av ortogonala funktioner ges av $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}$.

Skriv $f(x)$ som en linjärkombination av de ortogonala funktionerna.

$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$.

Multiplicera ekvationen med $\varphi_m(x)$ och integrera över intervallet $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = c_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)\,dx + c_2\int_a^b \varphi_2(x)\varphi_m(x)\,dx + \ldots + c_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx + \ldots$$

Eftersom den givna funktionsföljden är ortogonal blir varje integral på höger sida lika med noll utom då $n \neq m$.

Ekvationen blir då $\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = c_m\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)\,dx$, dvs $c_m = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)\,dx}$.

Den sökta utvecklingen blir $f(x) = \sum_{m=1} c_m\varphi_m(x) = \sum_{m=1} \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)\,dx}\varphi_m(x)$.

b) Vi bestämmer koefficienterna i utvecklingen $f(x) = c_1 1 + \sum_{n=1} a_n\cos nx + \sum_{m=1} b_m\sin mx$.

$$c_1 = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_1(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)1\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx}{2\pi} = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\cos nx\,dx}{\int_a^b \cos nx\cos nx\,dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx}{\pi}$$

$$a_n = \frac{\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin nx}{n}\,dx}{\pi} = \frac{\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi n^2}$$

$$b_m = \frac{\int_a^b f(x)\sin mx\,dx}{\int_a^b \sin mx\sin mx\,dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx} = \frac{\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin mx\,dx}{\pi}$$

$$b_m = \frac{\left[(\pi - x)\frac{-\cos mx}{m}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{-\cos mx}{m}\,dx}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{m} - \left[-\frac{\sin mx}{m^2}\right]_0^{\pi}}{\pi} = \frac{1}{m}$$

Den sökta utvecklingen är: $f(x)=\frac{\pi}{4}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}\cos nx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mx$.

c) Seriens värde för $x=0$ erhålles som medelvärdet av funktion i detta språng.

Vi får att värdet är $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$.

SVAR: a) $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m(x)dx}\varphi_m(x)$ b) $f(x)=\frac{\pi}{4}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}\cos nx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mx$ c) $\frac{\pi}{2}$.

9. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{F}$

10. Vilka värden kan linjeintegralen $\oint_C (y-2x^2y)dx+(xy^2-3x)dy$ anta om C är en enkel sluten kurva som genomlöps ett varv i positiv led?
Lösning:
Vi tillämpar Green´s formel i planet och erhåller då:

$$\oint_C (y-2x^2y)dx+(xy^2-3x)dy=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2-3x)-\frac{\partial}{\partial y}(y-2x^2y)\right]dxdy=\iint_D\left\{y^2-3-(1-2x^2)\right\}dxdy$$
.

Det minsta värdet som integralen kan anta erhålles då integrationsområdet är det område där integranden är negativ.
Således ges detta av

$$D_{\min}=\left\{(x,y):\ y^2-3-(1-2x^2)\le 0\right\}=\left\{(x,y):\ 2x^2+y^2\le 4\right\}=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}.$$

Vi beräknar integralen över detta område och använder oss då av elliptiska koordinater: $\begin{cases}x=\sqrt{2}r\cos\theta\\ y=2r\sin\theta\end{cases}$.

Integrationselementet blir i elliptiska koordinater lika med $2\sqrt{2}rdrd\theta$
och integrationsområdet beskrivs av $D_{r\theta\min}=\{(r,\theta):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta<2\pi\}$.

Insättning i integralen ger: $\oint_C (y-2x^2y)dx+(xy^2-3x)dy=\iint_{D_{r\theta\min}}\left\{4r^2\sin^2\theta-4+4r^2\cos^2\theta\right\}2\sqrt{2}rdrd\theta$.

$$\oint_C (y-2x^2y)dx+(xy^2-3x)dy=2\sqrt{2}\iint_{D_{r\theta\min}}\left\{4r^3-4r\right\}drd\theta=2\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\left[r^4-2r^2\right]_{r=0}^{1}=-4\pi\sqrt{2}.$$

Det minsta värde linjintegralen kan anta är $-4\pi\sqrt{2}$.

Vi undersöker nu vilka värden som kan antas och betraktar en skara av ellipser på formen: $\begin{cases}x=a\sqrt{2}r\cos\theta\\ y=a2r\sin\theta\end{cases}$.

Insättning i integralen ger:

$$\oint_C (y-2x^2y)dx+(xy^2-3x)dy=\iint_{D_{r\theta\min}}\left\{4a^2r^2\sin^2\theta-4+4a^2r^2\cos^2\theta\right\}a^22\sqrt{2}rdrd\theta$$

$$\oint_C (y - 2x^2 y)dx + (xy^2 - 3x)dy = a^2 2\sqrt{2} \iint_{D_{r\theta\,\min}} (a^2 4r^3 - 4r)\,dr\,d\theta = a^2 2\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[a^2 r^4 - 2r^2\right]_{r=0}^{1} = a^2 4\pi\sqrt{2}$$

.

Vi har en kontinuerlig funktion som antar alla värden från det minsta $-4\pi\sqrt{2}$ och uppåt.

SVAR: De värden som linjeintegralen kan anta är från det minsta $-4\pi\sqrt{2}$ och obegränsat uppåt.