KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 17-24p; 4: 25-31p; 5: 32-40p, inklusive bonus.
Uppgifterna: 1-7 ger 3 poäng vardera och 8-10 ger 5 poäng vardera.
Bonuspoäng från hösten 2003 får tillgodoräknas.

1. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right)dx$.

2. Betrakta differentialekvationen $y' = y(y-1)(y-3)$, där $y = y(t)$ och t anger tiden.
Analysera vad som händer efter lång tid. Studera speciellt startvärdena $y(0) = 3$ respektive $y(0) = 2$.

3. En full tank innehåller 300 liter vatten i vilket 50 gram salt är löst.
En annan saltlösning med koncentrationen 2 gram per liter pumpas in med en hastighet av 3 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Ställ även upp motsvarande differentialekvation då utpumpningshastigheten är 2 liter per minut.
Bestäm saltmängden vid tiden t för det fall då tanken ej sprängs.

4. Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = 0$, $x > 0$
samt en partikulärlösning till differentialekvationen $x(y'' - 2y' + y) = e^{x}$, $x > 0$.

5. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3$, $1 \le t \le 2$ och noll för övrigt.
Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.

6. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Låt matrisen $\mathbf{A}$ vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2.
Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)
a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.
b $\lambda_{1,2} = -1 \pm 9i$.
c) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$.

7. Bestäm den funktion, $u(x,t)$, som uppfyller differentialekvationen $u_t = u_x$ och villkoret $u(x,0) = 7e^{x} + 5e^{3x}$.

8.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a,b]$.
Låt vidare $y = f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$.
Bestäm f :s utveckling i den ortogonala funktionsföljden.
b) Utveckla $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ -\pi < x < 0 \\ \pi - x , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1,\ \cos nx,\ \sin mx\}$, $n = 1,2,3,..,$ $m = 1,2,3,\ldots$.
c) Bestäm seriens värde för $x = 0$.

9. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$

10. Vilka värden kan linjeintegralen $\displaystyle\oint_C (y - 2x^2)dx + (xy^2 - 3x)dy$ anta om C är en enkel sluten kurva som genomlöps ett varv i positiv led?