KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 13/4 2004. Svar och lösningsförslag.

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + (x-1)e^{-y} = 0 \\ y(1) = \ln\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   Ange även lösningens existensintervall.

Ekvationen är separabel och kan skrivas som $e^y\, dy = (1-x)\, dx$. Ledvis integration ger $e^y = -(1-x)^2/2 + C$. Begynnelsevillkoret ger (sätt in $x=1, y=\ln 1/2$) att $C = 1/2$. Alltså är $e^y = \dfrac{1-(1-x)^2}{2} = \dfrac{2x-x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left(\dfrac{2x-x^2}{2}\right)$. Denna lösningen genom punkten $(1, \ln 1/2)$ är definierad så länge $\dfrac{2x-x^2}{2} > 0$ vilket är ekvivalent med att $x(2-x) > 0$ vilket i sin tur är ekvivalent med att $0 < x < 2$.

<u>SVAR:</u> $y = \ln\left(\dfrac{2x-x^2}{2}\right)$, $0 < x < 2$.

---

2. Bestäm samtliga fixpunkter till det tidsdiskreta dynamiska systemet (iterationsmodellen) $x_{n+1} = x_n e^{1-x_n}$. Bestäm också fixpunkternas stabilitet.

För ett tidsdiskret dynamiskt system $x_{n+1} = f(x_n)$ ges fixpunkter som lösningar till ekvationen $x = f(x)$, i detta fall ekvationen $x = xe^{1-x}$. $x_1 = 0$ är en lösning till denna ekvation. Om $x \neq 0$ fås ekvationen $1 = e^{1-x}$, med lösning $x_2 = 1$.

Fixpunkterna stabilitet undersöks med hjälp av $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$.

$|f'(0)| = e > 1 \quad \Rightarrow$ (enligt sats) $x_1 = 0$ är en instabil (repellerande) fixpunkt.

$|f'(1)| = 0 < 1 \quad \Rightarrow$ (enligt sats) $x_2 = 1$ är en stabil (attraherande) fixpunkt.

<u>SVAR:</u> $x_1 = 0$ är en instabil (repellerande) fixpunkt, $x_2 = 1$ är en stabil (attraherande) fixpunkt. Systemet har inga andra fixpunkter.

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$, när man vet $y(x) = e^x$ är en lösning.

Ekvationen har karaktäristisk ekvation $r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0$. Eftersom $y_1(x) = e^x$ är en lösning, har den kar. ekv. en rot $r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (r-1)$ är en faktor i vänsterledet. Polynomdivision ger att vänsterledet kan faktoriseras, och ekvationen skrivas $(r-1)(r^2 - 2r + 2) = 0$, så kar. ekv. övriga två rötter ges av $r = 1 \pm i$, som svarar mot två lösningar $y_2(x) = e^x \cos x$ och $y_3(x) = e^x \sin x$ till den givna differentialekvationen. Allmän lösning fås genom superposition

<u>SVAR:</u> Allmän lösning är $y(x) = (A + B\cos x + C\sin x)e^x$, *A*, *B*, och *C* godtyckliga reella konstanter.

---

4. Bestäm en partikulärlösning $y_p(x)$ till

$$y'' + 4y' + 4y = x^{3/2}e^{-2x}, \quad x > 0$$

genom att göra ansatsen $y_p(x) = u(x)e^{-2x}$.

Ansatsen $y_p = ue^{-2x}$ ger

$y_p' = u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}$ och $y_p'' = u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x}$.

y_p är nu en lösning om och endast om

$(u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x}) + 4(u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}) + 4ue^{-2x} = x^{3/2}e^{-2x}$

som förenklas till den ekvivalenta ekvationen $u''e^{-2x} = x^{3/2}e^{-2x}$ som i sin tur är ekvivalent med att $u'' = x^{3/2}$. Två successiva integreringar (där vi nonchalerar integrationskonstanter eftersom vi endast söker en partikulärlösning) får vi $u(x) = \frac{4}{35}x^{7/2} \quad \Rightarrow y_p(x) = \frac{4}{35}x^{7/2}e^{-2x}$.

<u>SVAR:</u> $y_p(x) = \frac{4}{35}x^{7/2}e^{-2x}$ är en partikulär lösning på angiven form.

---

5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = yx - y \\ y' = x + y + x^2 \end{cases}$$

Kritiska punkter är per definition lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} yx - y = 0 \\ x + y + x^2 = 0 \end{cases},$$

där den första ekvationen har de uppenbara lösningarna $x = 1$ eller $y = 0$, och inga andra lösningar.

Om $x = 1$ är den andra ekvationen uppfylld omm $y = -2$.

Om $y = 0$ är den andra ekvationen uppfylld omm $x + x^2 = 0$ vilket i sin tur gäller omm $x = 0$ eller $x = -1$. Vi finner alltså tre kritiska punkter $(1,-2)$, $(0,0)$ och $(-1,0)$.

Dessa kritiska punkters karaktär undersöks med hjälp av systemets Jacobimatris

$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial P/\partial x & \partial P/\partial y \\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y \end{pmatrix}$, där $\begin{cases} P(x,y) = yx - y \\ Q(x,y) = x + y + x^2 \end{cases}$. Vi får

$J(x,y) = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ 1+2x & 1 \end{pmatrix}$. Vi undersöker de kritiska punkterna en och en:

$(1,-2)$. $J(1,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Matrisen är triangulär, och vi kan läsa av egenvärdena på huvuddiagonalen; ett positivt och ett negativt egenvärde implicerar att $(1,-2)$ är en sadelpunkt.

$(0,0)$. $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $t = 0 + 1 = 1 > 0$, $\Delta = 1$, $t^2 - 4\Delta = -3 < 0$ ger att $(0,0)$ är en instabil spiral.

$(-1,0)$. $J(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\Delta = -2$ ger att $(-1,0)$ är en sadelpunkt.

<u>SVAR:</u> Systemet har tre kritiska punkter, $(1,-2)$ och $(-1,0)$ som är sadelpunkter (sådana är instabila) och en instabil spiral i $(0,0)$.

---

6. Bestäm en icke-konstant lösning till

$$\begin{cases} u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t), & t>0, \quad 0<x<3, \\ u'_x(3,t)=0, & t>0, \\ u(0,t)=0, & t>0. \end{cases}$$

Vi ansätter lösningar av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Differentialekvationen separeras till $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = g$ (separationskonstant). Vi prövar först med $g = -l^2, l > 0$. För X får vi då ekvationen $X'' + l^2 X = 0$ som har lösningar $X(x) = A\cos lx + B\sin lx$. Villkoret $u(0,t)=0$, $t>0$ implicerar för en icke-konstant lösning att $X(0)=0 \quad \Rightarrow \quad A=0$, så $X(x) = B\sin lx, B \neq 0 \quad \Rightarrow X'(x) = Bl\cos lx$. Villkoret $u'_x(3,t)=0, t>0$ ger på motsvarande sätt att $X'(3)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos 3l = 0$, eftersom $B \neq 0, l \neq 0$, vilket ger $3l = \frac{p}{2} + np \Rightarrow l = \frac{p}{6} + \frac{np}{3}$. Vi väljer $n=0$, $B=1$ och får $X(x) = \sin px/6$ hörande till $l = \frac{p}{6}, g = -l^2 = -\frac{p^2}{36}$.

För T får vi då ekvationen $T' + \frac{p^2}{36}T = 0$, som har en lösning $T(t) = e^{-\frac{p^2}{36}t}$.

Vi hittar alltså en lösning $u(x,t) = X(x)T(t) = e^{-\frac{p^2}{36}t}\sin(\frac{p}{6}x)$.

(Vi behöver inte pröva med icke-negativ separationskonstant, vi har redan en lösning)

<u>SVAR:</u> T.ex. $u(x,t) = e^{-\frac{p^2}{36}t}\sin(\frac{p}{6}x)$

B-uppgifter

7. En viss populations storlek $P(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2}P\left(1 - \frac{P^2}{10^{10}}\right)$$

Vad kan man säga om populationsutveckling på lång sikt, och hur beror långtidsbeteendet på den initiala populationsstorleken $P(0)$?

Ekvationen är autonom, och har stationära lösningar $P(t) = \text{konstant}$ som ges av $\frac{3}{2}P\left(1 - \frac{P^2}{10^{10}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P=0$ eller $P = 10^5$. De stationära lösningarna $P=0$ och

$P = 10^5$ delar tP-planet, $P \geq 0$, i två horisontella band (varav det övre ä r uppåt obegränsat). Övriga lösningar rör sig inom ett av dessa band, p.g.a. av entydighet kan de inte korsa konstant-lösningarna (eller varandra).

För att få en bilda av övriga lösningars utseende tittat vi på riktningsfältet. Teckenstudium av ekvationens högerled visar att $\frac{dP}{dt} > 0$ så länge $0 < P < 10^5$, så lösningar i detta band är monotont växande, och $\frac{dP}{dt} < 0$ när $P > 10^5$ vilket ger montont avtagande lösningar i detta band. Monotona, begränsade lösningar måste närma sig ett gränsvärde som i sin tur måste vara en konstantlösning.

SLUTSATS = <u>SVAR:</u> Varje positivt begynnelesvärde $P(0) > 0$ ger en lösning $P(t)$ sådan att $\lim_{t\to\infty} P(t) = 10^5$, dvs. populationen kommer att stabiliserar sig på denna nivå, oavsett initialpopulationens storlek.

---

8. Betrakta följande system

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm systemets allmänna lösning.
b) Beskriv banorna (=lösningskurvorna) i xyz-rummet i ord och med enkla skisser. Beakta speciellt fallen med banor som startar på z-axeln respektive i xy-planet, men beskriv också övriga banors utseende.

a) Vi beräknar systemmatrisens egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} -3-l & 2 & 0 \\ -1 & -1-l & 0 \\ 0 & 0 & -2-l \end{vmatrix} = -(2+l)\begin{vmatrix} -3-l & 2 \\ -1 & -1-l \end{vmatrix} = -(2+l)(l^2+4l+5)$$

som ger $l_1 = -2$, $l_{2,3} = -2 \pm i$.

Till $l_1 = -2$ beräknas (se läroboken) egenvektorn $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi får en lösning $\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

Till det komplexkonjugerade paret $l_{2,3} = -2 \pm i$ av egenvärden finner vi lösningar (se läroboken)

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{-2t}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\sin t\right\} \text{ och } \mathbf{X}_3(t) = e^{-2t}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\sin t\right\}.$$

Allmän lösning fås genom superpoition.

<u>SVAR:</u> $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$, c_i godtyckliga reella tal, $\mathbf{X}_i$ som ovan, $i = 1,2,3$.

b) $\mathbf{X}_1$ beskriver en rörelse längs *z*-axeln, in mot den stationära lösningen i origo när $t \to +\infty$.

$\mathbf{X}_2$ och $\mathbf{X}_3$ rör sig bägge i en spiral i *xy*-planet, in mot origo när $t \to +\infty$. En allmän lösning är en superposition av dessa två rörelser, dvs. en spiral-rörelse längs ytan på en rät kon med *z*-axeln som huvudaxel med sin spets origo. Rörelsen går mot *xy*-planet och mot origo när $t \to +\infty$.

---

9. Låt $f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -p/2; \\ 1, & -p/2 \le t \le p/2; \\ 0, & p/2 < t < \infty; \end{cases}$.

   a) Bestäm *f*:s Fourierserie på intervallet $(-p, p)$.

   b) Bestäm Fouriertransformen av *f* på $(-\infty, \infty)$, och ange också formeln för återtransformering. (Ett par olika definitioner av Fouriertransformen förekommer i litteraturen; du kan naturligtvis välja den du är bekant med.)

9 a) Vi bestämmer Fourierkoefficienterna. Eftersom funktionen är jämn gäller att Fourierserien på intervallet $(-p, p)$ är av formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,dt = \frac{2}{p}\int_0^{p/2} dt = 1, \text{ och}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos nx\,dt = \frac{2}{p}\int_0^{p/2}\cos nx\,dt = \frac{2}{p}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{p/2} = \frac{2}{np}\sin\frac{np}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0,2,\ldots \\ 2/(np), & n = 1,5,\ldots \\ -2/(np), & n = 3,7,\ldots \end{cases}$$

<u>SVAR (9 a):</u> $f(t)$ har på $(-p, p)$ Fourierserien

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{2}{(2m+1)p}\cos(2m+1)x = \frac{1}{2} + \frac{2}{p}\cos x - \frac{2}{3p}\cos 3x + \frac{2}{5p}\cos 5x + \ldots$$

9 b) Fouriertransformen $F(w)$ definieras som $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\, dt$ som i detta fall är

$$= \int_{-p/2}^{p/2} e^{-iwt}\, dt = \int_{-p/2}^{p/2} \cos wt + i \sin wt\, dt = 2\int_{0}^{p/2} \cos wt\, dt = \frac{2\sin(wp/2)}{w}$$

<u>SVAR (9b):</u> $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\, dt = \frac{2\sin(wp/2)}{w}$. Återtransformering fås genom

$$f(t) \sim \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wp/2)}{wp} e^{iwt}\, dw .$$

---

10. Konstruera ett 1:a ordningens initialvärdesproblem (en differentialekvation samt ett initialvärde) som har en lösning $y(x)$ som existerar på intervallet $(1,\infty)$ och sådan att $y(x)$ har det oegentliga gränsvärdet $+\infty$ när x går mot 1 från höger, dvs. $\lim_{x->1+} y(x) = +\infty$.

Funktionen $y(x) = \frac{1}{x-1}$ har de önskade egenskaperna. Eftersom $y'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ uppfyller *y* differentialekvationen $y' = -y^2$, och eftersom *y*s graf passerar genom punkten $(2,1)$ uppfyller *y* initialvillkoret $y(2) = 1$.

<u>SVAR:</u> T.ex. $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(2) = 1 \end{cases}$