Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag för
5B1215 Komplexa funktioner för ME, 04–10–13.

- Hjälpmedel: BETA.
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- Om lappskrivning j är godkänd (där $j = 1$ eller 2), så fås automatiskt 3 poäng på uppgift j.
- Betygsgränser: 9–11 poäng ger betyget 3, 12–14 poäng ger betyget 4, och 15-18 poäng ger betyget 5.

1. *Bestäm bilden av det horisontella bandet* $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < Im\, z < 2\}$ *under avbildningen* $w = z^2$.

   Lösning: $u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$ visar att $u = x^2 - y^2$ och $v = 2xy$. För fixt y blir $x = v/2y$, så att

$$u = \frac{v^2}{4y^2} - y^2.$$

   Då $y = 1$ och x växer från $-\infty$ till ∞ är $u = v^2/4 - 1$ och $v = 2x$, som växer från $-\infty$ till ∞.

   Då $y = 2$ och x avtar från ∞ till $-\infty$ är $u = v^2/16 - 4$ och $v = 4x$, som avtar från ∞ till $-\infty$.

   Högerhandsregeln visar sedan att bildområdet blir området mellan dessa parabler, det vill säga

$$-4 + \frac{v^2}{16} < u < -1 + \frac{v^2}{4}.$$

2. *Härled en formel för $w = \arctan z$ genom att lösa ut w ur ekvationen $z = \tan w$. Mera specifikt: visa att $\arctan z$ kan skrivas som en lämplig konstant gånger sammansättningen av logaritmfunktionen och en viss rationell funktion.*

   Lösning:

$$
\begin{aligned}
z = \tan w = \frac{(1/2i)\,(e^{iw} - e^{-iw})}{(1/2)\,(e^{iw} + e^{-iw})} &= -i\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \\
\iff e^{iw} \cdot z + e^{-iw} \cdot z &= -ie^{iw} + ie^{-iw} \\
\iff e^{iw}(z+i) = e^{-iw}(i-z) &\iff e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z} \\
\iff 2iw &= \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\
\iff w = \arctan z &= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right).
\end{aligned}
$$

3. *Beräkna alla värden som*

$$f(z) = (1 + i\sqrt{3})^z$$

   antar då $z = i$, och ange dessa värden på formen $a + ib$, där a och b är reella tal.

   Loösning:

$$
\begin{aligned}
(1 + i\sqrt{3})^i &= e^{i\log(1+i\sqrt{3})} = e^{i(\ln 2 + i\pi/3 + i2\pi n)} \\
&= e^{i\ln 2} \cdot e^{-\pi/3 + 2\pi n} = e^{2\pi n - \pi/3} \cdot (\cos\ln 2 + i\sin\ln 2),
\end{aligned}
$$

   där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4. *Bestäm en konform avbildning av vinkelområdet $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \pi/6\}$ på enhetsskivan $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.*

   Lösning: Avbilda först vinkelområdet på övre halvplanet genom $z \mapsto z^6$, och sedan övre halvplanet på enhetsskivan t.ex. genom att skicka spegelpunkterna i och $-i$ till 0 respektive ∞ med en Möbiusfunktion, d.v.s.

$$z \mapsto z^6 \mapsto \frac{z^6 - i}{z^6 + i} = w.$$

5. *Bestäm en funktion* $g(x,y)$ *definierad i övre halvplanet* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ *som uppfyller*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{för} \quad y > 0, \quad \text{och}$$

$$g(x,0) = \begin{cases} 3 & \text{då} \quad -\infty < x < -2, \\ -5 & \text{då} \quad -2 < x < 4, \\ 7 & \text{då} \quad 4 < x < \infty, \end{cases} \qquad \text{för} \quad y = 0.$$

Lösning: Det standardförfarande som beskrivs i kompendiet visar att man får en lösning genom

$$g(x,y) = 7 - \frac{12}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{x-4}{y} + \frac{8}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{x+2}{y}.$$

6. *Bestäm en lösning* $g(x,y)$ *till följande randvärdesproblem för Laplace-operatorn:*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \quad y > 0 \text{ och } x^2 + (y-1)^2 > 1,$$
$$g(x,y) = 0 \quad \text{då} \quad y = 0 \text{ och } x \neq 0,$$
$$g(x,y) = 1 \quad \text{då} \quad x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ och } x \neq 0.$$

Ledning: *De båda "randcirklarna" har origo som gemensam punkt. Om denna skickas till* ∞ *med en Möbiusfunktion, så avbildas båda "randcirklarna" på räta linjer, och bildområdet blir så enkelt att man inser en enkel ansats för lösningen till motsvarande problem där.*

Lösning: Vi använder den justa ledningen och sätter $w = 1/z$. Då kommer den reella axeln att avbildas på sig själv, fast med omvänd orientering: x växer $\iff$ $1/x$ avtar. För att se vilken rät linje som cirkeln $\{x^2 + (y-1)^2 + 1\}$ avbildas på sätter vi in två punkter: $z = 2i \Rightarrow w = 1/z = -i/2$ och $z = 1 + i \Rightarrow w = 1/z = 1/2 - i/2$. Om vi går runt cirkeln medsols så ser vi att bilden blir linjen $\operatorname{Im} w = -1/2$, genomlöpt från vänster till höger. Högerhandsregeln visar därpå att bildområdet blir $\{-1/2 < \operatorname{Im} w < 0\}$. Randvärdena blir: $g = 0$ på $\{v = 0\}$ och $g = 1$ på $\{v = -1/2\}$.

Lösningsansats: $g = av + b$, där a och b bestäms av

$$\begin{cases} v = 0 : \quad 0 = b, \\ v = -1/2 : \quad 1 = a(-1/2) + 0 \Rightarrow a = -2, \end{cases}$$

varför $g = -2v$. Här är v lika med imaginärdelen av $1/z$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

så att

$$v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

och

$$g(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$