Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till
5B1215 Partiella differentialekvationer för ME2, 04–08–20.

- Hjälpmedel: BETA (*och ingenting annat*).
- Har du fått minst 4 poäng tillsammans på hemtalen $2k-1$ och $2k$ (där $k=1,2$ eller 3), så har du därmed klarat tal k nedan.
- Man kan få maximalt 20 poäng på denna skrivning.
- Poänggränser: 11–13 poäng ger betyget 3, 14–17 poäng ger betyget 4, och 18–20 poäng ger betyget 5.

1. *Lös följande 1-dimensionella vågekvation:*

PDE	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$	$0 < x < \pi,\ t > 0,$	
RV	$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$	$t > 0,$	
BV 1	$u(x,0) = 2\sin x - 7\sin 3x + 5\sin 7x,$	$0 < x < \pi,$	
BV 2	$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$	$0 < x < \pi.$	(3p)

Lösning: Enligt sidan 97 i läroboken ger PDE + RV +BV 2 att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nt.$$

BV 1 visar sedan att

$$2\sin x - 7\sin 3x + 5\sin 7x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

så att $b_1 = 2$, $b_3 = -7$, $b_7 = 5$, medan övriga b_n är lika med 0.

SVAR: $u(x,t) = 2\sin x\cos t - 7\sin 3x\cos 3t + 5\sin 7x\cos 7t.$

2. *Låt m vara ett fixt positivt heltal. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$xy'' - (x+m)y' + my = 0,$$

och visa speciellt att man som en av de två lineärt oberoende lösningarna kan välja ett polynom. (3p)

Lösning: Eftersom $x = 0$ är en reguljärt singulär punkt så gör vi Frobeniusansatsen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ med $a_0 \neq 0$. Härur fås att

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2};$$

insättes detta i differentialekvationen får vi

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} m\, a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} m\, a_n x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Genom att byta summationsindexet n mot $n-1$ i den andra och den fjärde summan kan detta istället skrivas som

$$\begin{aligned} &a_0[r(r-1) - mr] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n[(n+r)(n+r-1) - m(n+r)] - a_{n-1}(n-1+r-m)\big)x^{n+r-1} = 0, \end{aligned}$$

varur man får att

$$\begin{cases} r(r-1-m) = 0 \quad (\text{eftersom } a_0 \neq 0), \\ a_n(n+r)(n+r-1-m) - a_{n-1}(n+r-1-m) = 0 \quad \text{då } n \geq 1. \end{cases}$$

Den första ekvationen visar att $r = 0$ eller $r = 1+m$; låt oss titta på fallet $r = 0$! I så fall säger den andra ekvationen att

$$a_n \cdot n \cdot (n-1-m) = a_{n_1} \cdot (n-1-m) \quad \text{då } n \geq 1.$$

Då $n \neq 1+m$ kan vi förkorta bort faktorn $(n-1-m)$ och får

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots m, m+2, m+3, \ldots.$$

Vi får följande tre fall:

(a)

$$1 \leq n \leq m \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n!} a_0;$$

eftersom $0! = 1$ gäller detta även då $n = 0$.

(b) $n = 1+m \Rightarrow a_{m+1} \cdot 0 = a_m \cdot 0 \Rightarrow a_{m+1}$ är godtycklig.

(c)

$$\begin{aligned} n \geq m+1 \Rightarrow a_n &= \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} a_{n-1} = \ldots \\ &= \frac{1}{n(n-1)\ldots(m+1)} a_{m+1} = \frac{(m+1)!}{n!} a_{m+1}. \end{aligned}$$

Med $A = a_0$ och $B = (m+1)!a_{m+1}$ får vi därför

$$a_n = A \cdot \frac{1}{n!} \text{ då } n = 0, 1, \ldots, m \text{ och } a_n = B \cdot \frac{1}{n!} \text{ då } n = m+1, m+2, \ldots,$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$y = A\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^m}{m!}\right) + B\left(\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{x^{m+2}}{(m+2)!} + \ldots\right).$$

$A = 1$ och $B = 0$ ger polynomlösningen

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!},$$

medan $A = B = 1$ (t. ex.) ger lösningen

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

SVAR: $y(x) = C_1 \cdot \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + C_2 \cdot e^x$, där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

3. *Beräkna den allmänna lösningen till följande differentialekvation då $t > 0$:*

$$y'' - y = \begin{cases} 0 & \text{då } t \le 2, \\ t-2 & \text{då } t > 2. \end{cases} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Laplacetransformering av $y'' - y = (t-2)\theta(t-2)$ ger

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = e^{-s}\frac{1}{s^2},$$

varur man löser ut $Y(s)$ till

$$Y(s) = y(0)\frac{s}{s^2-1} + y'(0)\frac{1}{s^2-1} + e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2-1)}.$$

Allt här hittas i BETA utom den allra sista kvoten. Partialbråksuppdelning ger emellertid att

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$

vilket med $x = s^2$ ger

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}.$$

I och med detta kan man nu tillbakatransformera $Y(s)$ till $y(t)$ med hjälp av formlerna i BETA, och får då följande

SVAR: $y(t) = y(0) \cdot \cosh t + y'(0) \cdot \sinh t + (\sin(t-2) - (t-2))\,\theta(t-2)$, där $y(0)$ och $y'(0)$ är godtyckliga konstanter.

4. *Syftet med uppgifterna 4–6 är att bestämma* energinivåerna för den kvantharmoniska oscillatorn i en rumsvariabel. *Utgångspunkten är den tidsoberoende Schrödingerekvationen*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + \frac{kx^2}{2} = E \cdot u,$$

där $E =$ *energien och* $u \in L^2(-\infty, \infty)$. *Om man inför den nya variabeln*

$$y = \sqrt[4]{\frac{km}{\hbar^2}} \cdot x,$$

så omvandlas denna ekvation till

$$-\frac{d^2u}{dy^2} + y^2 u = \lambda u,$$

där $\lambda = 2E/\hbar\omega$, *med* $\omega = \sqrt{k/m}$. *Uttryckt i* λ *ges alltså energien av* $E = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \lambda$.

För att förenkla denna differentialekvation inför man den nya beroende variabeln $w(y)$ *genom*

$$u(y) = w(y)e^{-y^2/2}.$$

Visa *att* $w(y) \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty)$ *och att* $w(y)$ *satisfierar differentialekvationen*

$$w'' - 2y\,w' + (\lambda - 1)w = 0.$$

Visa vidare att denna kan skrivas på Sturm-Liouvilleformen

$$(e^{-y^2}w')' + (\lambda - 1)e^{-y^2}w = 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

Om vi som randvillkor kräver att $w(y)$ *är så väluppfostrad då* $y \to \pm\infty$ *att* $w \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty)$, *så får vi ett* singulärt Sturm-Liouvilleproblem *med* diskreta *egevärden.* (3p)

Lösning: Först ser vi att

$$u \in L^2(-\infty, \infty) \iff \int_{-\infty}^{\infty} u^2(y)\,dy < \infty \iff \int_{-\infty}^{\infty} w^2(y) \cdot e^{-y^2}\,dy < \infty$$
$$\iff w \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty).$$

Sedan noterar vi att

$$u = w \cdot e^{-y^2/2} \Rightarrow u' = w' \cdot e^{-y^2/2} - w \cdot y \cdot e^{-y^2/2} = (w' - yw)e^{-y^2/2} \Rightarrow$$
$$u'' = w'' \cdot e^{-y^2/2} - 2w' \cdot y \cdot e^{-y2/2} - w \cdot e^{-y^2/2} + w \cdot y^2 \cdot e^{-y^2/2}$$
$$= (w'' - 2yw' - w + y^2 w)e^{-y^2/2}.$$

Insatt i $-u'' + y^2 u = \lambda u$ ger detta att $w'' - 2yw' - w + y^2 w - y^2 w = -\lambda w$ eller

$$w'' - 2yw' + (\lambda - 1)w = 0.$$

Om man beräknar derivatan i första termen i den angivna Sturm-Liouvilleekvationen får man

$$w''e^{-y^2} - 2yw'e^{-y^2} + (\lambda - 1)we^{-y^2} = 0,$$

som uppenbarligen är ekvivalent med ovanstående differentialekvation.

Tillsammans med villkoret $w \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty)$ får vi därmed ett Sturm-Liouvilleproblem, som tvingar egenvärdet $\lambda - 1$ att anta vissa *diskreta* värden – som i sin tur bestämmer energinivåerna.

5. *Lös differentialekvationen*

$$w'' - 2y\,w' + (\lambda - 1)w = 0$$

genom potensserieansatsen $w = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, y^j$, *och visa speciellt att allmänna lösningen kan skrivas som en summa av en jämn och en udda funktion:*

$$\begin{aligned} w &= a_0 \cdot \big(1 + (\dots)y^2 + (\dots)y^4 + \dots\big) + a_1 \cdot \big(y + (\dots)y^3 + \dots\big) \\ &= w_{\text{jämn}} + w_{\text{udda}}. \end{aligned}$$

Det återstår att avgöra vilka av lösningarna ovan som uppfyller randvillkoren $w \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty)$ *i* $\pm\infty$. *Låt oss t.ex. betrakta* $w_{jämn}$ *(*w_{udda} *behandlas analogt).*

Visa *att* om $w_{jämn}$ *är en* oändlig *serie, så blir förhållandet mellan två på varandra följande koefficienter*

$$\frac{a_{2n}}{a_{2(n-1)}} \approx \frac{1}{n} \quad \text{för stora } n,$$

och slut härur att $w_{jämn} \approx e^{y^2}$. *Kan då* $w_{jämn} \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty)$*?* (4p)

Lösning: Insättning av

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j \Rightarrow w' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j y^{j-1} \Rightarrow w'' = \sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1)y^{j-2}$$

i differentialekvationen ger

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1)y^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} 2a_j j y^j + \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - 1)a_j y^j = 0.$$

Genom att byta summationsindexet j mot $j + 2$ i den första summan får man

$$\sum_{j=0}^{\infty} \big(a_{j+2}(j+2)(j+1) - a_j(2j - \lambda - 1)\big)y^j = 0,$$

vilket i sin tur ger att

$$a_{j+2} = \frac{2j - \lambda + 1}{(j+2)(j+1)} a_j \qquad \text{för } j \geq 0.$$

Låt oss sätta in några olika j-värden:

$$
\begin{aligned}
j = 0 &\Rightarrow a_2 = \frac{1-\lambda}{2!}a_0,\\
j = 2 &\Rightarrow a_4 = \frac{5-\lambda}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(5-\lambda)(1-\lambda)}{4!}a_0, \quad \text{och så vidare;}\\
j = 1 &\Rightarrow a_3 = \frac{3-\lambda}{3\cdot 2}a_1 = \frac{3-\lambda}{3!}a_1,\\
j = 3 &\Rightarrow a_5 = \frac{7-\lambda}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(7-\lambda)(3-\lambda)}{5!}a_1, \quad \text{och så vidare.}
\end{aligned}
$$

Eftersom rekursionsformeln stegar 2 steg $-$ från j till $j+2$ $-$ inses att

$$a_{2n} = (\dots)a_0 \quad \text{och} \quad a_{2n+1} = (\dots)a_1 \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \dots.$$

Vi kan därmed skriva vår lösning som

$$
\begin{aligned}
w(y) &= a_0 \cdot \big(1 + (\dots)y^2 + (\dots)y^4 + \dots\big) + a_1 \cdot \big(y + (\dots)y^3 + (\dots)y^5\big) =\\
&= w_{\text{jämn}} + w_{\text{udda}}.
\end{aligned}
$$

Om vi sätter $a_1 = 0$ så blir

$$w = w_{\text{jämn}} = a_0 + a_2y^2 + a_4y^4 + \dots.$$

Antag nu att oändligt många av koefficienterna ovan är skilda från noll! Med $j = 2(n-1)$ i rekursionsformeln ovan fås

$$a_{2n} = \frac{4(n-1) - \lambda + 1}{2n\cdot(2n-1)}a_{2(n-1)},$$

så att

$$\frac{a_{2n}}{a_{2(n-1)}} = \frac{4n(1-\frac{3+\lambda}{4n})}{4n^2(1-\frac{1}{2n})} = \frac{1}{n}\frac{1-\frac{3+\lambda}{4n^2}}{1-\frac{1}{2n}} \approx \frac{1}{n} \quad \text{för stora } n.$$

Därmed blir

$$a_{2n} \approx \frac{1}{n}\cdot a_{2(n-1)} \approx \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}a_{2(n-2)} \approx \dots \approx \frac{a_0}{n!} \quad \text{då } n \text{ är stort,}$$

vilket innebär att

$$w_{\text{jämn}} \approx a_0\left(1 + \frac{y^2}{1!} + \frac{(y^2)^2}{2!} + \frac{(y^2)^3}{3!} + \dots\right) = a_0\cdot e^{y^2}.$$

Därmed fås

$$||w_{\text{jämn}}||^2_{e^{-y^2}} \approx a_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y^2}\cdot e^{-y^2}\,dy = a_0^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2}\,dy + \infty,$$

så vårt $w_{\text{jämn}}$ tillhör definitivt inte $L^2_{e^{-y^2}}(-\infty,\infty)$.

6. *Slutsatsen av ovanstående överläggningar blir att $w(y)$ uppfyller randvillkoren* bara om w är ett polynom. *Visa hur detta krav sedan bestämmer de möjliga värdena på λ − vilka i sin tur bestämmer de olika energinivåerna. Ange till slut de senare!* (4p)

Lösning: Från föregående uppgift inses att enda möjligheten att få en lösning $w \in L^2_{e^{-y^2}}(-\infty, \infty)$ är att *bara ändligt många koefficienter är skilda från 0.* Så för något n måste

$$0 = a_{n+2} = \frac{2n - \lambda + 1}{(n+2)(n+1)} a_n,$$

vilket betyder att

$$\lambda = 2n + 1.$$

Låt oss betrakta fallen n är udda, respektive jämn.

(1) $n =$ udda tal : Sätt $a_0 = 0$, så att $w_{\text{jämn}} = 0$. Från rekursionsformeln följer att inte bara a_{n+2} utan även $a_{n+4} = a_{n+6} = \ldots$ är lika med noll, så att bara $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_n$ är skilda från noll. Då blir

$$w = w_{\text{udda}} = a_1 y + a_3 y^3 + \ldots a_n y^n = \text{ polynom av graden } n.$$

(2) $n =$ jämnt tal : Med $a_1 = 0$ blir bara $a_0, a_2, \ldots a_n$ skilda från noll, så att lösningen blir

$$w = w_{\text{jämn}} = a_0 + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n = \text{ polynom av graden } n.$$

Med lämpligt valda värden på a_1 respektive a_0 fås på detta sätt de så kallade *Hermitepolynomen* − se BETA!

SLUTSATS: λ kan bara anta värdena $\lambda_n = 2n + 1$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$, vilket innebär att de tillåtna energinivåerna ges av

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \lambda_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \ldots.$$