## Lösningsskisser till tentamen 5B1304 020816

**1.** Indexekvationen som hör till Eulerekvationen i uppgiften är $s(s-1) - 2s + 2 = 0 \Leftrightarrow s^2 - 3s + 2 = 0$. Dess rötter är $s = 1$ och 2. Motsvarande homogena Euelerekvation har därför $y = Ax + Bx^2$ ($A$ och $B$ godtyckliga konstanter) som allmän lösning.

För den inhomogena ekvationen

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x\,e^x$$

erhålls en partikulärlösning genom ansatsen $y = A(x)\,x + B(x)\,x^2$. Lämpliga $A(x)$ och $B(x)$ får man ur

$$\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x\,e^x \end{pmatrix},$$

där $\boldsymbol{W}$ är Wronskimatrisen

$$\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 2x & -x^2 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x\,e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\,e^x \\ e^x \end{pmatrix},$$

varav efter integration t. ex $A(x) = (1-x)e^x$ och $B(x) = e^x$. En partikulärlösning är alltså

$$y_p = (1-x)e^x \cdot x + e^x \cdot x^2 = x\,e^x$$

och man får,

**Svar:** $y = x\,e^x + Ax + Bx^2$, där $A$ och $B$ är godtyckliga konstanter.

**2.** Ansatsen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i differntialekvationen ger

$$y''' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} = xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Men indexbyte $n \to n+4$ i den vänstra summan ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} = \sum_{n=-4}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)\,a_{n+4}\,x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)\,a_{n+4}\,x^{n+1}$$

Identifieras denna summa med $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ så får man

$$a_3 = 0 \text{ och } a_{n+4} = \frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)}\,a_n,\ n \ge 0.$$

Begynnelsevillkoren medför att $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 0$, $a_2 = y''(0)/2 = 0$, varför $a_4 = \frac{1}{4\cdot3\cdot2}a_1 = \frac{1}{24}$, $a_8 = \frac{1}{8\cdot7\cdot6}a_4 = \frac{1}{336\cdot24} = \frac{1}{8064}$, $a_5 = a_1 = 0$, $a_6 = a_2 = 0$ och $a_7 = a_3 = 0$.

**Svar:** $y = 1 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8064}x^8 + \ldots$

*Amnärkning*: Man kan också direkt beräkna $y^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \ldots, 8$ och sedan utnyttja att $a_n = y^{(n)}(0)/n!$: Givna begynnelsevillkor säger att $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 0$, $a_2 = y''(0)/2 = 0$. Vidare har man att

$y''' = xy \qquad y'''(0) = 0 \qquad a_3 = 0/3! = 0,$

$y^{(4)} = xy' + y \qquad y^{(4)}(0) = y(0) = 1 \qquad a_4 = 1/4! = 1/24,$

$y^{(5)} = xy'' + 2y' \qquad y^{(5)}(0) = 2y'(0) = 0 \qquad a_5 = 0/5! = 0,$

$$y^{(6)} = xy''' + 3y'' \qquad y^{(6)}(0) = 3y''(0) = 0 \qquad a_6 = 0/6! = 0,$$
$$y^{(7)} = xy^{(4)} + 4y''' \qquad y^{(7)}(0) = 4y'''(0) = 0 \qquad a_7 = 0/7! = 0,$$
$$y^{(8)} = xy^{(5)} + 5y^{(4)} \qquad y^{(8)}(0) = 5y^{(4)}(0) = 5 \qquad a_8 = 5/8! = 1/8064.$$

**3a.** Fourierserien är i detta fall $2\pi$-periodisk, varför $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, där talet $-\frac{\pi}{2}$ ligger i intervallet $-\pi < t < \pi$.

Alltså $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} \sin\frac{t}{3}\right]_{t=-\pi/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$.

**Svar:** $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

**3b.** För utveckling i serier med ortogonala termer, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t)$, har man att

$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|u_n\|^2$ . I detta fall är $u_n(t) = \sin nt$, och $\|u_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \, dt = \pi$, varför

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt \quad \text{(Parsevals relation).}$$

Tillämpas detta på $c_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2 - 1/9}$ och utvecklingen i 3a, så får man

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2 - 1/9}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin\frac{t}{3}\right)^2 dt = \frac{\pi}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{3}\, dt =$$

$$2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \cos\frac{2t}{3}\right) dt = \frac{\pi}{3}\left[t - \frac{3}{2}\sin\frac{2t}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

**Svar**: $\frac{\pi}{3}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

.

**4a.** Ekvationen är på formen $[ry']' + [q + \lambda p]y = 0$ med $r = 1$, $q = 0$ och viktsfunktionen $p = 1$ och alltså en Sturm-Liouville*ekvation*. Randvillkoren har formen $k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0$, $l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$, med $a = 0$, $b = \pi/2$, $k_1 = l_2 = 1$, och $k_2 = l_1 = 0$. Det är alltså fråga om ett Sturm-Liouville*problem*. (Se § 4.7 i läroboken.)

**4b.** Ekvationen är linjär med konstanta koefficienter. Dess karakteristiska ekvation är $D^2 + \lambda = 0$ med rötterna $D_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.
Ekvationens allmänna lösning är därmed:

$$y = \begin{cases} A e^{\sqrt{-\lambda}x} + B e^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{om } \lambda < 0, \\ A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x\,, & \text{om } \lambda > 0, \\ A + Bx, & \text{om } \lambda = 0. \end{cases}$$

Med randvillkoren $y(0) = y'(\pi/2) = 0$ får man bara triviala lösningar om $\lambda \le 0$.
För $\lambda > 0$ måste $A = 0$ (ty $y(0) = 0$) och $B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\cdot\pi/2) = 0$ (ty $y'(\pi/2) = 0$). Icke-trivial lösning finns alltså om och endast om $\sqrt{\lambda}$ = (udda heltal) = $2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
dvs. $\lambda_n = (2n + 1)^2$, 1, $n = 0, 1, 2, \ldots$ .
Motsvarande egenfunktioner år då $u_n = B_n \sin(2n + 1)t$.
Eftersom viktsfunktionen $p$ enligt 4a är = 1, så är skalärprodukten:

$$<f, g> = \int_0^{\pi/2} f(t)\, g(t)\, dt.$$

**Svar:** Egenvärden $(2n + 1)^2$, egenfunktioner $B_n \sin (2n + 1)t$., $n = 0, 1, 2, \dots$ .

$$\text{Skalärprodukt: } <f, g> = \int_0^{\pi/2} f(t)\, g(t)\, dt.$$

**4c.** Koefficienterna $c_n$ i serien beräknas enligt

$$c_n = \frac{<f, u_n>}{<u_n, u_n>},$$

där $<f, g>$ är den till problemet hörande skalärprodukten. Enligt 4b kan $u_n$ tas till $\sin (2n + 1)t$. Detta ger

$$<f, u_n> = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin (2n + 1)t\, dt, \quad <u_n,u_n> = \int_0^{\pi/2} \sin^2(2n + 1)t\, dt = \frac{\pi}{4}$$

och **Svar:** $c_n = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x) \sin (2n + 1)t\, dt.$

**5.** Ansatsen $u(x,t) = X(x)Y(y)$, $X$ och $Y$ ej nollfunktionerna, ger

$$X''(x)Y(y) - yX(x)Y'(y) = X(x)Y(y) \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{yY'}{Y} + 1 = \text{konstant } k.$$

Enligt randvillkoren $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ gäller dessutom att $X(0) = X(\pi) = 0$.

Man får
$$\begin{cases} X'' - kX = 0, & X(0) = X(\pi) = 0 \quad [1] \\ Y'/Y = (k-1)/y & [2] \end{cases}$$

Villkoren [1] är uppfyllda för icketriviala $X$ om och endast om $k = -n^2$, $n = 1, 2, \dots$ och då är $X_n = C_n \sin nx$. För dessa $k$-värden har den separabla ekvationen [2] lösningarna $Y_n = D_n\, y^{-(1 + n^2)}$.

Funktionerna $u_n = A_n\, y^{-(1 + n^2)} \sin nx$ satisfierar alltså alla villkoren i uppgiften utom möjligen randvillkoret $u(x, 1) = \sin 2x$. Detta uppfylls också om $A_n \sin nx = \sin 2x$, dvs om $n = 2$ och $A_n = 1$. Alltså:

**Svar**: $u(x,y) = \dfrac{\sin 2x}{y^5}$ .

**6a.** Man har att $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\sin z$ och $\cos z$ analytiska i hela planet samt $\cos z = 0$ om och endast om $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Funktionen $\tan z$ är alltså analytisk utom i dessa punkter, av vilka endast $z = \pi/2$ och $z = 3\pi/2$ ligger närmare än 3 från punkten 3 + i.

(Rita figur eller konstatera att $|(2n + 1)\pi/2 - (3 + i)| < 3 \Leftrightarrow$
$((2n + 1)\pi/2 - 3)^2 + 1^2 < 9 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < (2n + 1)\pi/2 - 3 < \sqrt{8} \Leftrightarrow$
$\underbrace{(3 - \sqrt{8})/\pi - 1/2}_{\approx -0.45} < n < \underbrace{(3 + \sqrt{8})/\pi - 1/2}_{\approx 1.36} \Leftrightarrow n = 0$ eller 1.)

**Svar**: $z \neq \pi/2$ och $\neq 3\pi/2$.

**6b.** Enligt 6a och resduumsatsen är $\oint_C \tan z\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=\pi/2} \tan z + \operatorname{Res}_{z=3\pi/2} \tan z\right)$. För dessa singulariteter, som är enkla poler eftersom cos-funktionens nollställen är enkla, har man $\operatorname{Res}_{z=\alpha} = \left[\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right]_{z=\alpha} = \frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha} = -1$, Alltså $\oint_C \tan z\,dz = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$.

**Svar:** $-4\pi i$.

**7a.** Divergenssatsn ger:

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dA = \iiint_K (\operatorname{div}\boldsymbol{F})\,dxdydz,$$

där $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - yz) = 2xy + 1 - y$. Integralen är därför =

$\iiint_K (2x-1)y\,dxdydz + \iiint_K 1\,dxdydz$ . Här är integranden i den första integralen en udda funktion av $y$ och integrationsområdet **K** symmetrisk kring $xz$-planet (dvs planet $y = 0$). Den intgralens värde är alltså = 0. Den andra integralen är = volymen av **K** = volymen av ett halvklot med radie 1 = $2\pi/3$. Alltså

**Svar:** $2\pi/3$.

*Anmärkning*: Integralens värde kan naturligtvis också kalkyleras fram, t. ex:

$$\iiint_K (2x-1)y\,dxdydz = \int_0^1\left(\iint_{x^2+y^2\le 1-z^2}(2x-1)y\,dxdy\right)dz = [\text{polär subst}] =$$

$$\int_0^1\left(\iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{1-z^2}\\ 0\le v\le 2\pi}}(2r\cos v - 1)r^2\sin v\,drdv\right)dz = 0,$$

ty $\int_0^{2\pi}\cos v\sin v\,dv = 0$ och $\int_0^{2\pi}\sin v\,dv = 0$ .

**7b.** Med samma resonemang som i 7a får man att $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dA = \iiint_K 1\,dxdydz = V$, vilket ger

**Svar:** 1.