Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning, matematisk analys (5B1304), den 16/8 2002, kl 14^{00}–19^{00}.

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, Kreyszig och kurslitteratur från tidigare matematikkurser, föreläsningsanteckningar samt räknedosa utan ”Computer Algebra System” (= automatisk formelbehandling).
Gamla tentamina med lösningar är inte tillåtna.

Fordringar:

Betyg:	3	4	5
Minimipoäng totalt:	12	16	22
Minsta antal uppgifter med ≥ 2p:	3		
Min.poäng sammanlagt på uppgifterna 1, 2, 3, 4 resp 5, 6, 7:	3	4	4

Om Du tar resultat från β så bör använd sida *och handbokens upplagenummer* anges!

1. Bestäm den allmänna lösningen till Euler-ekvationen:

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = x e^x, \quad x > 0,$$

med hjälp av variation-av-parameter-metoden. (3p)

2. Bestäm termerna t o m grad 8 av potensserielösningen till differentialekvationen

$$y''' - xy = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0.$$ (3p)

3. I ett tabellverk över fourierserieutvecklingar avläser man att

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 - 1/9} \sin nt = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sin\frac{t}{3}, \text{ då } -\pi < t < \pi.$$

a. Beräkna $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ (1p)

b. Summera med hjälp av Parsevals relation serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - 1/9)^2}$. (2p)

4. Betrakta differentialekvationen

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le \pi/2,$$

med bivillkoren $y(0) = y'(\pi/2) = 0$.

a. Verifiera att problemet är av Sturm-Liouville-typ. (1p)

b. Bestäm egenvärdena λ_n, tillhörande egenfunktionerna $u_n(x)$ och ange motsvarande skalärprodukt. (3p)

c. Låt $f(x)$ vara en godtycklig deriverbar funktion definierad på intervallet $0 \le x \le \pi/2$ och sådan att $f(0) = f'(\pi/2) = 0$.

Ange hur koefficienterna c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, i serieutvecklingen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, u_n(x)$$

kan beräknas. (2p)

Var god vänd!

5. Lös ekvationen $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u,$$
då $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, 1) = \sin 2x$ och $0 \le x \le \pi$, $0 < y \le 1$. (3p)

6. a. Låt **C** vara den i det komplexa talplanet belägna cirkel som har medelpunkten (3 + i) och radien 3. För vilka punkter inom cirkeln är funktionen $f(z) = \tan z$ analytisk? (2p)

b. Beräkna

$$\oint_{\mathbf{C}} \tan z \, dz,$$

där **C** är cirkeln nämnd i uppgift a genomlupen i positiv led. (2p)

7. a. Låt **K** vara övre halvan av enhetsklotet: $\{(x,y,z);\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$ och låt **S** vara dess totala begränsningsyta (kupad del + bottenplatta). Beräkna ytintegralen

$$\oint\!\!\oint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dA, \text{ där } \boldsymbol{F} = (x^2 y + z^2, y + xz, x^2 - yz)$$

och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade normalen till **S**. (3p)

b. Låt **K** vara en godtycklig kropp som är spegelsymmetrisk i xz-planet (dvs. den övergår i sig själv om den speglas i xz-planet) och låt **S** vara dess totala begränsningsyta. Beräkna för $\boldsymbol{F}$ som ovan

$$\frac{\oint\!\!\oint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dA}{V}, \text{ där } V \text{ är volymen hos kroppen } \mathbf{K}$$

och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade normalen till **S**. (2p)

Lycka till!