Institutionen för matematik
KTH

Lösningsskisser för tentamen 5B1304, 030108

1. Substitutionen $y = e^{2x}\cdot z$ ger $y' = e^{2x}\cdot(z' + 2z)$, $y'' = e^{2x}\cdot(z'' + 4z' + 4z)$:
Insättes detta i den givna ekvationen så får man:
$$e^{2x}\cdot((1-2x)(z'' + 4z' + 4z) + 4x(z' + 2z) - 4z) = 0,$$
dvs. $$(1-2x)z'' + 4(1-x)z' = 0 \Leftrightarrow \frac{z''}{z'} = 4\,\frac{x-1}{1-2x} = -2 - \frac{2}{1-2x}.$$
Integration ger $$\ln|z'| = -2x + \ln|1-2x| + \ln|C|,$$
dvs. $$z' = C\,e^{-2x}(1-2x).$$
Ytterligare integration ger
$$z = -C\frac{1}{2}e^{-2x}(1-2x) + C\frac{1}{2}e^{-2x} + D = Cx\,e^{-2x} + D.$$
Varav **Svar:** $y = Cx + D\,e^{2x}$.

2. Ekvationen kan skrivas
$$x^2y'' + 2xy' + 9x^2y = 0,\ x > 0,$$
och är därmed en transformerad Besselekvation, dvs av formen
$$x^2y'' + x(a + 2bx^r)y' + [c + dx^{2s} - b(1-a-r)x^r + b^2x^{2r}]\,y = 0,$$
$(a = 2, b = c = 0, d = 9, s = 1)$
Dess allmänna lösning är då
$$y = x^{\frac{1-a}{2}}e^{-\frac{bx^r}{r}}\left(A\,J_p\left(\frac{\sqrt{d}}{s}x^s\right) + B\,J_{-p}\left(\frac{\sqrt{d}}{s}x^s\right)\right) = x^{-1/2}(A\,J_p(3x) + B\,J_{-p}(3x)),$$
där $p = \dfrac{1}{s}\sqrt{\left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2 - c} = \dfrac{1}{2}$.
Men $J_{1/2}(t) = \text{konst}\cdot\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ och $J_{-1/2}(t) = \text{konst}\cdot\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$, varför
Svar: $y = C\dfrac{\sin 3x}{x} + D\dfrac{\cos 3x}{x}$.

3. Summan $s(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$, $-\infty < t < \infty$, är den 2π-periodiska fortsättningen av $f(t) = e^t$, $0 < t < 2\pi$ och antar i språngpunkterna $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, värdet $(f(2\pi-) + f(0+))/2 = (e^{2\pi} + 1)/2$.
Eftersom $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n = s(0)$, så är den summan $= \dfrac{e^{2\pi}+1}{2}$.
Enligt Parsevals formel är
$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) = \int_0^{2\pi}|s(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi}e^{2t}\,dt = \frac{e^{4\pi}-1}{2},\ \text{dvs.}$$
$$a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{4\pi}-1}{2} + \frac{a_0^2}{2},\ \text{där } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^t\,dt = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}.$$
Svar: $\dfrac{e^{2\pi}+1}{2}$ respektive $\dfrac{e^{4\pi}-1}{2\pi} + \dfrac{(e^{2\pi}-1)^2}{2\pi^2}$.

4. a. Ekvationen kan skrivas

$$(xy')' + \lambda \frac{1}{x} y = 0,\ 1 \le x \le 2,$$

och är alltså av formen $(ry')' + (q + \lambda p)y = 0$. Viktsfunktionen p är i detta fall $\frac{1}{x}$.

b. Ekvationen är av Eulertyp med indexekvation

$$s(s-1) + s + \lambda = 0 \Leftrightarrow s = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

För $\lambda > 0$ är den allmänna lösningen till ekvationen (då $x > 0$) därmed

$$y = A\,\mathrm{Re}(e^{i\sqrt{\lambda}\ln x}) + B\,\mathrm{Im}(e^{i\sqrt{\lambda}\ln x}) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x).$$

Randvillkoret $y(1) = 0$ medför att $A = 0$ och randvillkoret $y(2) = 0$ sedan att $B\sin(\sqrt{\lambda}\ln 2) = 0$. För egenfunktionerna är minst en av konstanterna A och $B \neq 0$, varför egenvärdena ges av villkoret

$$\sqrt{\lambda}\ln 2 = n\pi \ (n \text{ heltal} > 0) \Leftrightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Motsvarande egenfunktioner är då enligt ovan:

$$y_n = B_n \sin\left(n\pi \frac{\ln x}{\ln 2}\right)\ (= B_n \sin(n\pi \log_2 x)),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

För $\lambda \le 0$ är den allmänna lösningen

$$y = A x^{\sqrt{-\lambda}} + B x^{-\sqrt{-\lambda}} \ (\text{om } \lambda < 0) \text{ och } = A + B\ln x \ (\text{om } \lambda = 0).$$

I båda fallen är randvillkoren uppfyllda endast om $A = B = 0$. Det finns alltså inte flera egenvärden och egenfunktioner än de som bestämts ovan.

Svar a: $\frac{1}{x}$, **b:** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2$ resp. $y_n = B_n \sin\left(n\pi \frac{\ln x}{\ln 2}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. a. Man får

$$x\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + s\,\tilde{u}(x,s) - \underbrace{u(x,0)}_{=x^2} = x^2\cdot\frac{1}{s} \Leftrightarrow x\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + s\,\tilde{u}(x,s) = x^2\cdot\left(\frac{1}{s} + 1\right),$$

som är en ordinär differntialekvation med x som oberoende variabel och s som parameter.

b. Differentialekvationen i a. är linjär och av 1:a ordningen:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{s}{x}\tilde{u} = x\cdot\frac{1+s}{s}.$$

En integrerande faktor är (för $s > 0$) $e^{\int (s/x)dx} = e^{s\ln x} = x^s$. Efter multiplikation med denna får man

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^s\tilde{u}) = x^{s+1}\cdot\frac{1+s}{s},$$

vilket efter integration och division med x^s ger

$$\tilde{u} = x^2\frac{1+s}{s(s+2)} + C\frac{1}{x^s},\ (C \text{ oberoende av } x).$$

Eftersom $\tilde{u}$ definierad för alla x (om s tllräckligt stort), speciellt också för $x = 0$, så måste $C = 0$ och man får att

$$\tilde{u}(x,s) = x^2\frac{1+s}{s(s+2)}.$$

c. Partialbråksuppdelning med avseende på variabeln s ger att

$$\tilde{u}(x,s) = x^2\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)}\right)$$

och återtransformering:

$$u(x,t) = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\right)$$

Svar a: $x\cdot\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + s\,\tilde{u}(x,s) = x^2\cdot\left(\dfrac{1}{s} + 1\right)$, **b:** $\tilde{u}(x,s) = x^2\,\dfrac{1+s}{s(s+2)}$, **c:** $u(x,t) = x^2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\right)$

6. a. Sätter man $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = z$ och låter x genomlöpa intervallet $x\colon 0 \to 2\pi$, så kommer z att genomlöpa enhetscirkeln i det komplexa talplanet, ett varv i positiv led. Eftersom $\cos x = (z + z^{-1})/2$ och $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ så får man med denna substitution

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{13 + 12\cos x} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z/(\mathrm{i}z)}{13 + 6\,(z + z^{-1})} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(6z^2 + 13z + 6)}.$$

b. Integrandens poler bestäms av andragradsekvationen $6z^2 + 13z + 6 = 0$ som har rötterna $z = -\frac{2}{3}$ och $-\frac{3}{2}$. Av dessa ligger endast $z = -\frac{2}{3}$ innanför enhetscirkeln. Man har därför

$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(6z^2 + 13z + 6)} = 2\pi\mathrm{i}\,\operatorname*{Res}_{z=-2/3} \frac{1}{\mathrm{i}(6z^2 + 13z + 6)} = [\text{Enkel pol}] =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12z + 13}\right]_{z=-2/3} = 2\pi\cdot\frac{1}{5}.$$

Svar a: $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(6z^2 + 13z + 6)}$, **b:** $\dfrac{2\pi}{5}$.

7. Stokes' sats ger att $\displaystyle\oint_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathbf{S}} (\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}A$, där **S** är cirkelskivan som har **C** som randkurva och $\hat{\boldsymbol{n}}$ så vald att dess z-komponent är > 0. (För en betraktare i origo genomlöps kurvan medurs, vilket innebär att motsvarande normalvektor enligt högerskruvregeln pekar ”uppåt”.). I detta fall är

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(3z, z, 0) = (-1, 3, 0) \text{ och } \hat{\boldsymbol{n}} = \pm\frac{\operatorname{grad}(x+y+z)}{|\operatorname{grad}(x+y+z)|} = \pm\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}},$$

där +-tecknet skall väljas för att $\hat{\boldsymbol{n}}$:s z-komponent är > 0, alltså

$$\oint_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\mathbf{S}} (-1,3,0)\cdot(1,1,1)\,\mathrm{d}A = \frac{2}{\sqrt{3}}\underbrace{\iint_{\mathbf{S}} \mathrm{d}A}_{\text{Area av cirkel med radie 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Svar: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.